UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Matemáticas que construyen problemas

Autor/es

IGNACIO LÓPEZ MENDIVE

Director/es

JUAN MIGUEL RIBERA PUCHADES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Matemáticas que construyen problemas

Autor:

Ignacio López Mendive

Tutor: Juan Miguel Ribera Puchades

Máster de Profesorado en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2017/2018

A Mª Dolores, Gloria, Juanmi, Clara
y a todas las mujeres de mi vida.

RESUMEN

A lo largo de los años, el papel de la mujer en la ciencia ha evolucionado de manera notable hasta nuestros días, pero aun así no es suficiente. Es tiempo de cambiar, de revalorizar todo lo que estas mujeres han hecho a lo largo de la historia, y sobre todo, de darles la importancia que de una vez por todas merecen. Para ello, necesitamos nuevas herramientas que permitan a los alumnos, y en general a la gente joven, conocer a estas *figuras ocultas.*

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es presentar un conjunto de problemas matemáticos adecuadamente contextualizados en los que la protagonista es una mujer matemática, dando a conocer aspectos sobre su vida y obra. Este recurso didáctico, nos va a permitir concienciar al alumno sobre las desigualdades de género que sufren y han sufrido las mujeres a lo largo de la historia, a la vez que aprenden matemáticas de una manera distinta a la que están acostumbrados.

Palabras clave: Aprendizaje por descubrimiento, contextualización, mujer, micromachismo e igualdad de género.

ABSTRACT

Over the years, the role of women in science has evolved until today in a very important way, but it still not sufficient. It is time to change, to revalorize everything they have done throughout the history, and above all, to recognize their importance. For it, we need new tools to allow students and young people, to know about these *hidden figures.*

The main purpose of this TFM is to present a set of mathematical problems adequately contextualized in which a mathematica women is the protagonist, making her life and work known. That allows the student to familiarize and to arouse about the gender inequalities suffered by women, at the same time they are learning maths in a different way, something they are not used to doing.

Keywords: Discovery learning, contextualization, woman, micromachism and gender equality.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La realización de este Trabajo Fin de Máster de Profesorado en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, titulado *Matemáticas que construyen problemas* y tutorizado por Juan Miguel Ribera supone la culminación de mi etapa estudiantil en la Universidad de La Rioja, donde he tenido la oportunidad de adquirir la formación necesaria para orientar mi carrera profesional a la ciencia de las matemáticas. Haber cursado el Máster de Profesorado en Matemáticas me ha permitido conocer y experimentar de cerca el apasionante mundo de la docencia. Por ello, durante el presente trabajo trataré de reflejar todos los conocimientos y metodologías adquiridas durante este año.

Entre las diferentes motivaciones que me han llevado al desarrollo de este trabajo, destaca mi preocupación e implicación por la situación de la figura de la mujer en la sociedad actual. Aplicar la enseñanza de las matemáticas a una de las causas sociales más trascendentes de la actualidad es una herramienta de sensibilización que permite concienciar al alumnado sobre la igualdad de género. Se trata de orientar la educación y enseñanza de cualquier materia a través de la empatía, la tolerancia y el respeto, dotando a los alumnos y alumnas de un sentimiento crítico que les permita detectar, juzgar y rechazar cualquier tipo de discriminación hacia la mujer.

El objetivo es despertar las conciencias dormidas de la ciudadanía que ha normalizado los micromachismos; desde las tareas del hogar, hasta una azafata de televisión o las famosas chicas que sujetan los paraguas en las carreras de motos. Las noticias habituales de nuestros informativos son, en su mayoría, casos de violencia de género, asesinatos o violaciones, donde la justicia cuestiona a la víctima en vez de castigar al culpable. Todo esto tiene una solución y es educar desde la raíz. Para combatir esta lacra, el papel del profesor es de vital importancia. Tal y como refleja la OCDE en uno de sus últimos estudios:

> *"Hay más mujeres con estudios superiores entre la población de jóvenes de 25 a 34 años de edad, pero hay más hombres que obtienen*

un trabajo con ese nivel de titulación mientras ellas acaban engrosando más a menudo las listas del paro" (El País, 2015).

Y es que las tituladas universitarias tienen peor inserción laboral que los hombres, más tasa de paro, más precariedad y peores salarios. Y hablando de la universidad, hay más mujeres entre los alumnos, pero no entre los docentes, ya que solo 20 de cada 100 catedráticos son mujeres, y de 76 universidades, solo 11 están dirigidas por rectoras (Cadena Ser, 2018).

A pesar de que la mujer ha sido siempre catalogada como el *sexo débil*, discriminada y menospreciada respecto a la figura del hombre, poco a poco y a través de los diferentes movimientos feministas, se han conseguido pequeños logros que todavía no son suficientes, pero significan el inicio de un cambio real. Algunos de los más recientes y reveladores de los últimos años han sido el *8 M* de este 2018 (*Día de la Mujer*) o el *11 F* (*Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia*) revalorizando y defendiendo el papel de la mujer en la Ciencia.

Dentro del contexto de las matemáticas como instrumento para combatir la desigualdad de género, otra de mis principales motivaciones para el desarrollo de este trabajo han sido algunas de las asignaturas cursadas durante el Máster.

De la asignatura Complementos para la Formación Disciplinar cabe destacar el valor de la Historia de las Matemáticas como una potente herramienta didáctica, que permite valorar y reconocer el esfuerzo y trabajo que hay detrás de una fórmula o de un resultado matemático. Una de las impresiones que marcaron mi etapa de prácticas fue el desconocimiento de mujeres matemáticas por parte del alumno o alumna, reconociendo únicamente a figuras masculinas como Pitágoras y Descartes.

Respecto a la materia Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, he aplicado dos de los temas que más llamaron mi atención. Por un lado, se sitúa la *Creación de problema*s como herramienta didáctica para adaptar los problemas matemáticos a situaciones actuales de la vida real, con el fin de motivar al alumno con un tipo de matemática fuera de lo convencional o de las matemáticas al uso. Por otro lado, destaca la *Contextualización de problemas*, ya que en muchos de ellos se pueden identificar micromachismos estandarizados de tal forma que los alumnos no se percatan del contenido debido a su normalización social. Hay muchos libros de matemáticas y hojas de problemas de Secundaria que contienen problemas en los que siempre es una mujer la que hace la compra, la que más gasta de toda la familia o la que se ocupa de las tareas del hogar. También aparece reflejada en menor proporción respecto al hombre en problemas estadísticos relacionados con la educación, las oportunidades o el empleo. En el *Anexo I* he recopilado una serie de problemas matemáticos y otras notas que esconden situaciones machistas de las que os estoy hablando.

El pasado 8 de marzo, con motivo del Día de la Mujer, el País publicó un acertijo de lógica que llamó mi atención. Dice lo siguiente:

> *"Un padre y su hijo viajan en coche y tienen un accidente grave. El padre muere y al hijo se lo llevan al hospital porque necesita una compleja operación de emergencia, para la que llaman a una eminencia médica. Pero cuando entra en el quirófano dice: "No puedo operarlo, es mi hijo". ¿Cómo se explica esto?"* (El País, 2018)

La gran mayoría de las personas a las que se les propone el acertijo no logran dar con la solución correcta, ya que no son capaces de relacionar a la "*eminencia médica"* con una mujer, y esto es debido a un prejuicio machista, formado en una sociedad machista.

Tras esta breve introducción, trataré de desarrollar con el máximo rigor posible todos y cada uno de los apartados que componen este proyecto de innovación para su futura divulgación como recurso didáctico dentro del aula de Matemáticas.

2. OBJETIVOS

A continuación, enumeramos los diferentes objetivos a conseguir poniendo en práctica el presente proyecto de innovación. Como objetivo general destaca:

➢ Formar a los alumnos en la igualdad de género a través de un aprendizaje de las matemáticas distinto al convencional.

Éste se descompone en los siguientes objetivos específicos:

- En primer lugar, los objetivos específicos relacionados con el aprendizaje matemático:
    1) Conocer y aprender conceptos matemáticos realizando problemas adecuadamente contextualizados, que nos permitan asociar los contenidos matemáticos con los de otras asignaturas y con aspectos de la vida real.
    2) Utilizar y valorar la Historia en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En concreto el uso de la Historia de las Matemáticas para revalorizar el esfuerzo que ha conllevado a los grandes matemáticos la obtención de sus resultados (proposiciones, teoremas, demostraciones, *etc.),* con el fin de concienciar al alumnado sobre la importancia del esfuerzo, la constancia y el trabajo duro.
    3) Estudiar la evolución histórica de los conceptos matemáticos y la participación de las mujeres en ellos a lo largo de la historia.
    4) Valorar el papel de la mujer en la ciencia dando a conocer diferentes mujeres matemáticas a lo largo de la historia, a través de su biografía y contexto histórico. Dar importancia a sus aportaciones científicas a día de hoy.
    5) Promover un cambio de actitud hacia las matemáticas incidiendo en su importancia en la vida real y haciéndolas más atractivas para los alumnos.
    6) Fomentar la imaginación, curiosidad y creatividad en el alumno utilizando una matemática diferente que involucre el uso de la historia de estas mujeres, permitiéndoles participar de manera activa en la realización de problemas contextualizados. Fomentar la motivación

para que realicen investigaciones y trabajos adicionales que le permitan completar su conocimiento.

7) Crear problemas bien contextualizados que el alumno deba resolver a la vez que incentivamos su capacidad de reflexión y su actitud crítica.
8) Favorecer una autonomía en el aprendizaje y un conocimiento que perdure con el tiempo en el alumno.
9) Utilizar diferentes recursos en el aula. Por un lado, material adicional con el que el alumno pueda seguir trabajando (películas, noticias, libros, *etc.*), permitiendo la asignación de trabajos de investigación o exposiciones, individuales o por equipos; y por otro lado programas informáticos para la resolución de los problemas (*GeoGebra, Mathematica, etc.*).
10) Concienciar de la existencia de micromachismos en los problemas matemáticos de los libros de texto y hojas de ejercicios. Y no solo machistas, sino también sexistas, racistas, homófobos, *etc.*

- En segundo lugar, los objetivos específicos relacionados con formar a los alumnos en la igualdad de género:

11) Educar en género permitiendo que el alumno identifique las distintas formas de discriminación ante las mujeres, conozca los mitos que justifican la violencia machista y elimine los estereotipos y roles de género, con el fin de construir una sociedad más igualitaria, equitativa, democrática, y en consecuencia más justa.
12) Concienciar en la igualdad de género, haciendo que el alumno reflexione y sea crítico ante el sexismo y las distintas situaciones de desigualdad que puedan darse en su entorno.
13) Dotar al alumno con información, ejemplos y noticias de actualidad suficientes, que le permita detectar, juzgar y evaluar el machismo o acciones machistas que puedan darse en la vida real (en el colegio, en casa, en el mundo laboral, *etc.*).
14) Involucrar a los alumnos como personas activas en la erradicación de las desigualdades de género favoreciendo las estrategias y medios de

resolución ante conflictos. *¿Qué deben hacer cuando sufren o ven violencia de género?*

15) Fomentar el uso de un lenguaje no sexista, inclusivo y no discriminatorio.
16) Reforzar aspectos de la inteligencia emocional como la empatía, la motivación, el trabajo en equipo y las habilidades comunicativas, además de fomentar actitudes integradoras y cooperativas entre ellos.
17) Promover el papel activo de la ciudadanía en general y de la población joven en particular, en la reconstrucción de una sociedad basada en un modelo de identidad tolerante y solidario.

3. MARCO TEÓRICO

Durante el proceso enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Matemáticas, existen diferentes metodologías docentes que permiten al alumno adquirir nuevos conocimientos e interesarse por la materia. Podemos decir que la metodología predominante a lo largo de la historia ha sido el tradicional *Modelo Conductista,* basado en una *Clase Magistral,* en la que el docente es la figura central encargada de transmitir los conocimientos matemáticos, mientras que los alumnos y alumnas están en un segundo plano escuchando y memorizando datos.

Sin embargo, en los últimos años, han ido adquiriendo importancia otro tipo de metodologías basadas en el *Modelo Constructivista,* en las que el alumno es el centro de atención del proceso de enseñanza-aprendizaje. Todas ellas abogan por ir más allá que explicar unos contenidos o adquirir unos conocimientos. Además, el profesor o profesora pasa a tener un papel mediador, proporcionando al alumno la información necesaria y favoreciéndole un aprendizaje autónomo y significativo, es decir que aprenda a aprender. Dentro de este modelo destacan propuestas metodológicas como: *Aprendizaje significativo, Aprendizaje por descubrimiento, Zonas de desarrollo, Aprendizaje por modelos, Metodología activa, Aprendizaje cooperativo, Teoría de las inteligencias múltiples, etc.* Todas ellas creadas para complementar las *Clases Magistrales*, permitiendo así una participación activa por parte del alumno, en la construcción de su aprendizaje.

En el presente apartado vamos a desarrollar los aspectos teóricos más relevantes que fundamentan nuestro proyecto de innovación. Hablaremos de cuatro bloques principales: el *Aprendizaje por descubrimiento*, como metodología elegida; la *Contextualización de problemas*, como instrumento que nos ha permitido crear los diferentes problemas que son el núcleo presente trabajo; *Términos de género*, como elemento sustancial del proyecto; y *Otros proyectos* que nos han servido de inspiración para desarrollar el nuestro.

3.1. Aprendizaje por descubrimiento

> *"Los estudiantes deben ser animados a descubrir el mundo y las relaciones por sí mismos."* (Bruner, 1995)

El aprendizaje por descubrimiento o heurístico, fue desarrollado por el psicólogo estadounidense Jerome Bruner en los años 60. Esta metodología de carácter constructivista fomenta un aprendizaje autónomo en el alumno, es decir, le permite adquirir los conocimientos por sí mismo. El profesor no debe mostrar los contenidos de manera completa y acabada, ya que estos deben de ser descubiertos de forma progresiva y a través de la propia experiencia personal del alumno.

Por tanto, podemos distinguir dos roles principales en este tipo de aprendizaje. En primer lugar, el papel del profesor como guía e instructor del conocimiento, proporcionando los materiales y herramientas necesarias para motivar y estimular a los alumnos mediante diversas estrategias de observación y análisis. Y, en segundo lugar, pero no menos importante, el papel del alumno como participante activo (*Metodología activa/participativa)* en la construcción de su aprendizaje, motivado por la exploración, la curiosidad y el descubrimiento de los distintos contenidos.

Podemos diferenciar las distintas formas de descubrimiento, en función de los objetivos que deseemos alcanzar y de la capacidad cognitiva de los alumnos (Universidad VIU, 2015).

- *Descubrimiento inductivo*. Implica búsquedas particulares y recolección de datos con el fin de categorizarlos y clasificarlos.
- *Descubrimiento deductivo*. Se basa en relacionar y combinar las ideas generales para construir enunciados específicos.
- *Descubrimiento transductor*. El alumno compara varias ideas buscando la similitud entre ellas. Se caracteriza por involucrar un tipo de pensamiento imaginativo y artístico.

Las condiciones que deben presentarse para llevar a cabo un aprendizaje por descubrimiento son:

- Ámbito de búsqueda y desarrollo del trabajo restringido, centrado en los objetivos iniciales que los alumnos y alumnas deben alcanzar.
- Dichos objetivos deben estar muy especificados, de tal manera que resulten motivadores para el alumno.
- Hay que tener en cuenta los conocimientos previos del alumno, ya que constituyen la base necesaria para poder cumplir los objetivos establecidos.
- Hay que familiarizar a los alumnos con los procedimientos de observación y búsqueda, es decir con las herramientas necesarias para el proceso de descubrimiento.
- Los alumnos deben percibir que la tarea a realizar es significativa para ellos, con el fin de estimular su ha labor a seguir descubriendo y, en consecuencia, aprendiendo.

Una vez establecidas las condiciones de trabajo, debemos tener en cuenta los principios fundamentales que rigen el aprendizaje por descubrimiento:

- El conocimiento más importante es el autónomo, es decir el adquirido por uno mismo.
- Comprender el significado de los contenidos es producto del descubrimiento directo y de la no verbalización de los conceptos.
- El conocimiento verbal está implicado en la transferencia de información, al combinarse con el descubrimiento.
- El descubrimiento es la manera principal de transmitir el contenido, sobre todo en los cursos de un nivel inferior.
- La capacidad de resolver problemas aplicados a la vida real.
- Priorizar la mejorar el pensamiento crítico y creativo en el alumno.
- La enseñanza únicamente expositiva a través de una Clase Magistral es autoritaria y dogmática.
- El descubrimiento favorece a la organización de todo lo aprendido para poder ser utilizado de manera posterior.
- El descubrimiento genera motivación y confianza en el alumno.
- El descubrimiento favorece un aprendizaje duradero en el alumno, asegurando la conservación de los conceptos aprendidos.

La correcta puesta en práctica de esta metodología permite edificar un aprendizaje significativo en alumno, formándose de manera que adquieran los conocimientos necesarios a la vez que incorporan hábitos de investigación y organización autónoma.

3.2. Contextualización de problemas

Los libros de texto, hojas de problemas y en general, todos los materiales que el docente utiliza en su día a día, permiten establecer un nexo de unión entre los principios establecidos en el currículo y su puesta en práctica dentro del aula. Uno de los aspectos clave durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es proveer a los docentes de los recursos necesarios, que les permitan evolucionar del tradicional ejercicio de instrucción, basado en la discusión y solución de problemas con el uso de reglas y procedimientos directos que el alumno memoriza y que además le resultan insustanciales. Una evolución hacia la resolución de problemas es involucrar contextos distintos que a su vez requieran una reflexión significativa en el alumno, acerca de la información con la que se esté trabajando. Es decir, que durante el proceso de abordar una tarea o problema, el alumno o alumna debe tener la oportunidad de reflexionar y enfocar de manera crítica, no sólo las ideas matemáticas que le permitan alcanzar la solución, sino todo tipo de información que aparezca durante el enunciado y desarrollo del problema.

Podemos distinguir diferentes tipos de contextos asociados al enunciado de un problema o ejercicio. Éstos pueden categorizarse en función de la naturaleza de los datos del problema en (Matemática Educativa Cinvestav, 1999):

- Contexto puramente matemático. El enunciado del problema involucra exclusivamente aspectos matemáticos. El fin de este tipo de problemas es que el alumno, simplemente con el uso de distintos recursos matemáticos, plantee un camino hasta alcanzar la solución. El planteamiento de éste tipo de problemas queda limitado al ámbito puramente matemático.
- Contexto asociado al mundo real. El enunciado de este tipo de problemas incluye diferentes variables que modelan hechos de la vida real que rodean

al alumno, y que además pueden ser estudiadas a partir de recursos matemáticos. Este tipo de problemas es un "*arma de doble filo*", ya que por un lado trabajamos contenidos matemáticos, mientras que por otro es una herramienta fundamental que nos permite sensibilizar al alumno en diversos temas de actualidad.

- Contexto hipotético. El problema se crea en función a unos supuestos y unas variables que modelan una situación hipotética. Es decir, alguno de los datos que aparecen en el enunciado no son reales o demostrados científicamente. Este tipo de problemas permite al alumno usar y contrastar distintas estrategias creativas de resolución. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000) propone un conjunto de problemas de este estilo, en los que el objetivo central es emplear distintos recursos matemáticos, representaciones y formas de solucionarlos.

La meta de la contextualización de problemas es, en primer lugar, desarrollar los contenidos matemáticos necesarios durante el aprendizaje del estudiante; y, en segundo lugar, que los alumnos adquieran una conexión personal con la asignatura de matemáticas permitiéndoles ir más allá de la simple memorización de fórmulas y procedimientos.

Es común oír en las clases de matemáticas la expresión: *"la matemática está en todas partes"* (Gari y Silverman, 2009; Monaghan, 2007). Pues bien, la puesta en práctica de este enunciado en el aula no resulta tan sencilla, ya que la mayoría de los fenómenos y contextos que utilizamos durante la realización de problemas matemáticos son muy poco variados, generalmente asociados a unidades didácticas de Aritmética y Geometría.

A continuación, centraremos la atención la importancia de la figura del docente y en alguna de las claves que le permiten contextualizar adecuadamente un problema matemático (Parra, 2013).

- Debe conocer el objeto matemático sobre el que trata el problema, sus fundamentos, su historia y sus posibles aplicaciones a diferentes contextos.
  - Utilizar la Historia de las Matemáticas como herramienta contextualizadora es siempre buena idea.
  - Conocer la aplicación que pueda tener hoy en día el objeto matemático.

    - Conocer el conjunto de situaciones de la vida real de tipo: social, cultural o natural, sobre el que pueda desarrollarse el concepto matemático del problema.
- Tener en cuenta la fiabilidad de las fuentes de información para el planteamiento del problema.
- Establecer lazos comunicativos y afectivos con el estudiante, con el fin de conocer sus intereses, inquietudes, carencias y necesidades. Así favorecemos a la creación de un contexto favorable que nos permita vincular la matemática con aspectos de su vida.

En definitiva, es una herramienta que permite reinventar la matemática tradicional, haciendo posible que el alumno aprenda matemáticas haciendo matemáticas.

3.3. Terminología de género

A lo largo de la historia la mujer ha estado a la sombra del hombre. No será hasta la segunda mitad del siglo XX donde comienzan a coger fuerza los movimientos que no sólo abogan por la igualdad de derechos entre hombres y mujeres, sino que también pretenden acabar con aquellos estereotipos sociales causantes de los comportamientos discriminatorios hacia el papel de la mujer.

La igualdad de género y oportunidades es un hecho que no solo beneficia a las mujeres, sino a la sociedad en conjunto. Este principio garantiza tanto en hombres como en mujeres su participación en diversos campos y actividades sociales, perpetuando los valores de igualdad y equidad.

En el siguiente apartado revisaremos algunas de las terminologías más frecuentes relacionadas con la desigualdad de género, ya que creemos que *"una adecuada teoría es la base de una buena práctica".* Y es conveniente para la realización de unas buenas prácticas, conocer y diferenciar aquellos conceptos que comúnmente se confunden y entremezclan en nuestra sociedad actual.

- **Sexo.** Es un término que alude exclusivamente a las características biológicas en los hombres y las mujeres determinadas antes de nacer y son inmodificables. Entre ellas destacan los órganos genitales, el sistema hormonal y la capacidad reproductiva.

- **Género.** Es el conjunto de construcciones culturales (ideas, creencias, atribuciones, *etc.)* diferenciadas para hombres y mujeres en función de su sexo. La mayoría de ellas están impuestas por los sistemas políticos, sociales y económicos, y además pueden variar en función del tiempo, de la situación geográfica y de la cultura. A este término se le ha dado un uso equivocado, asociado exclusivamente a aspectos relacionados con la mujer, pero el género son todos aquellos ámbitos ideológicos que comprenden las relaciones entre los hombres y las mujeres. En definitiva, son todos aquellos factores sociales en función del sexo que se dan en una cultura determinada.

Podemos hacernos una idea de estas dos acepciones, que comúnmente se confunden, con el siguiente ejemplo. La expresión: "*el embarazo es una cuestión de género"*, es una afirmación falsa ya que alude a un aspecto biológico, no construido. Sin embargo, el enunciado *"las mujeres que están embarazadas deben evitar el alcohol"*, no es cuestión de sexo, sino una construcción cultural, es decir de género.

- **Socialización de género.** Es el proceso de aprendizaje en el que se transmiten las conductas, costumbres, creencias y valores dominantes en una determinada sociedad. Ésta da pie a la asignación de roles diferenciales y estereotipos sexuales impuestos como masculinos y femeninos. Podemos hablar de una socialización diferencial, ya que por el hecho de nacer hombre o mujer implica diferentes consideraciones y oportunidades sociales.
- **Estereotipos.** Son opiniones e imágenes preconcebidas muy simplificadas y poco desarrolladas, fundamentadas en una característica sexual común de un grupo determinado de personas que son generalizadas a la totalidad de los miembros del grupo. Son clichés, opiniones preconcebidas, caricaturas, con carácter peyorativo y cuya difusión no requiere de medios de transmisión formales, simplemente con el *"boca a boca*" basta.
- **Androcentrismo.** Es un tipo de pensamiento que sitúa al sexo masculino como el centro del Universo, invisibilizando la presencia de la mujer a un

segundo plano, a partir de la infravaloración y la negación de sus aportaciones y experiencias a la sociedad.

- **Sexismo.**

  "Todas aquellas prácticas y actitudes que promueven el trato diferenciado de las personas en razón de su sexo biológico, del cual se asumen características y comportamientos que se espera, las mujeres y los hombres, actúen cotidianamente. Las prácticas sexistas afectan principalmente a las mujeres dada la vigencia de creencias culturales que las consideran inferiores o desiguales a los hombres por naturaleza." (Instituto Nacional de la Mujer, 2013)

  Se atribuye a cualquier comportamiento discriminatorio hacia una persona por motivos de su sexo o identidad sexual, en este caso de cualquier persona hacia la mujer.

  Según Glick y Fiske (1996), este tipo de discriminación se puede clasificar de la siguiente manera:

  - Sexismo hostil. Permite justificar el poder masculino, los roles tradicionales y el trato hacia la mujer como objeto sexual.
  - Sexismo benévolo. Permite reconocer la dependencia de la mujer hacia el hombre, acompañada de sentimientos de protección sexista el cual defiende que las mujeres necesitan un hombre que las cuide.

- **Espacio público.** Son aquellos ámbitos públicos del mundo laboral, político y productivo afectados por la tradición masculina.
- **Espacio privado.** Son aquellos ambientes privados vinculados a la familia, a los vínculos afectivos y al ámbito doméstico, en los que la mujer ha tenido siempre un papel protagonista muy importante para la sociedad, pero muy poco valorado.
- **Brecha de género.** Todas aquellas desventajas sociales y económicas que surgen debido a la infravaloración de la mujer frente al hombre. Son aquellas diferencias que se dan en el acceso, participación y control de los servicios, recursos y oportunidades sociales.
- **Coeducación.** Es un método de intervención educativo basado en el principio de igualdad y no discriminación entre sexos. Con ello se pretende

educar a los alumnos independientemente de su sexo, reconociendo sus potencialidades e individualidades

- ***Mainstreaming* de género (transversalidad)**. Se define como:

  > *"La organización, la mejora, el desarrollo y la evaluación de los procesos políticos, de modo que la perspectiva de igualdad de género se incorpore en todas las políticas, a todos los niveles y en todas las etapas, por las y los actores normalmente involucrados en la adopción de medidas políticas"* (Consejo de Europa. Instituto de las Mujeres, 2004).

  Es un término que hace referencia a la necesidad de incorporar todos los aspectos relacionados con las desigualdades género a las líneas de trabajo de todos los poderes públicos, con el fin de conseguir una sociedad más justa y libre.
- **Equidad de género.** Se refiere a la justicia en el tratamiento de hombres y mujeres en función de sus necesidades.
- **Igualdad de género.** Es un principio constitucional que estipula que tanto hombres como mujeres son iguales ante las leyes, es decir tienen los mismos derechos dentro de la sociedad.

Estos dos últimos principios son generalmente usados indistintamente, no obstante, este uso es incorrecto. Por ejemplo, que hombres y mujeres cobren el mismo sueldo por realizar el mismo trabajo, es igualdad. Sin embargo, que la mujer cobre el mismo sueldo que un hombre estando de baja maternal, es equidad.

- **Feminismo.** Es un movimiento social y político surgido a través de la experiencia femenina a lo largo de la historia, criticando las desigualdades sociales entre hombres y mujeres, y proclamando los derechos de las mismas.
- **Machismo.** Es un tipo de sexismo basado en la discriminación y el menosprecio hacia la mujer como figura inferior al hombre. Fundado por estereotipos fuertemente influenciados por el entorno social.

Hay que aclarar que el feminismo y el machismo son dos términos completamente diferentes que no se contraponen, ya que la mayoría de las personas los creen contrarios. Es común escuchar por la calle la frase, que presume de una gran ignorancia: *"Ni machismo ni feminismo"*. Cabe destacar que el feminismo nació para luchar por la igualdad en ambos sexos, no para atacar la figura masculina.

- **Misoginia.** Es el comportamiento de odio y repulsión por parte de una persona hacia la mujer.
- **Patriarcado.** Es un sistema de organización social en el cual los principales poderes están en manos de los hombres (poderes políticos, sociales, religiosos y el padre como cabeza de familia).
- **Violencia de género (contra las mujeres).** Cualquier acto vejatorio de tipo verbal, psicológico, físico o sexual hacia una mujer en cualquier ámbito público o privado.

3.4. Otros proyectos

Para finalizar el marco teórico vamos a presentar algunos proyectos y trabajos que nos han servido de inspiración para llevar a cabo el presente proyecto de innovación.

Proyecto IUVENALIS

Es un proyecto innovador de la comunidad de Murcia que aboga por las buenas prácticas realizando acciones formativas en materia de Igualdad de Oportunidades y Prevención de la Violencia de Género, destinado a todo tipo de personas, desde trabajadores de las Administraciones públicas hasta jóvenes estudiantes. Pretende mejorar la capacidad de inserción social y laboral de jóvenes en situación de riesgo de exclusión social, a través de la adquisición de hábitos, conductas y actitudes, que les permitan alcanzar un nivel de vida autónomo.

Del proyecto nos ha sido de utilidad el *capítulo 2* en el que aparece un encuadre teórico del sistema sexo-género, con el cuál hemos podido realizar el glosario de términos relacionado con la transversalidad de género que aparecen en el apartado anterior (*ver apartado 3.3).*

Proyecto *Mi científica favorita*

Es un proyecto que se inició a principios de 2017 destinado a los últimos cursos de Educación Primaria de cualquier centro escolar del estado. Creado por la Comisión de Género del ICMAT[1] en colaboración con la Unidad de Comunicación del ICMAT y la Fundación española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT).

El proyecto se llevó a cabo en 29 centros escolares elegidos al azar. Cada curso debía realizar a lo máximo tres trabajos originales dedicados a la contribución y vida de alguna mujer científica. El objetivo del proyecto es hacer visible el papel fundamental de la mujer en la ciencia como modelo a seguir para acabar con las barreras y estereotipos asociados a la desigualdad de género y fomentar el espíritu científico entre los más jóvenes, sobre todo las estudiantes. Los resultados del proyecto han sido registrados en un catálogo, el cual reúne las biografías y aportaciones de las 28 mujeres científicas seleccionadas.

Hemos querido recoger los objetivos de este proyecto, a nivel de Primaria, e incluirlos dentro de nuestro proyecto de innovación, adaptándolos a un nivel educativo superior, Secundaria y Bachillerato, con el rigor y la dificultad que ambos suponen. También hemos querido incorporar aspectos relacionados con la manera de presentar y exponer los distintos datos históricos y biográficos de la mujer a los alumnos, con el fin de motivarlos para que continúen buscando información y completando su aprendizaje mediante la realización de trabajos históricos. Por ejemplo, una idea del proyecto *Mi científica favorita* que podemos incorporar en nuestro proyecto de innovación es la realización de ejercicios de ampliación en los que los alumnos por equipos realicen carteles y exposiciones basadas en la vida de mujeres matemáticas.

Proyecto *Hipatia*

Es un proyecto financiado por la Unión Europea dentro del programa Horizonte 2020, cuyo objetivo es desarrollar un marco teórico inclusivo en

---

[1] ICMAT: Instituto De Ciencias Matemáticas del CSIC.

género sobre la educación STEM[2], con la promoción de un conjunto de herramientas en escuelas, museos y universidades, que permitan atraer e inspirar a chicas adolescentes en el estudio de carreras STEM, y así incrementar la presencia de mujeres en estos campos científicos.

Inspirado por este proyecto, que además lleva el nombre de Hipatia (una de nuestras mujeres matemáticas protagonistas de nuestros problemas), hemos pretendido crear una herramienta didáctica que permita por un lado, inspirar y motivar al alumnado, sobre todo al sector femenino, abordando las matemáticas de una manera refrescante, proactiva y creativa; y por otro lado, valorar el papel de la mujer en la ciencia desde los confines de la historia hasta nuestros días, poniendo énfasis en las notables desigualdades sociales que sufren hoy en día nuestras científicas.

Proyecto *Otras miradas: Aportaciones de las mujeres matemáticas*

Este proyecto ha sido realizado por la Federación de Enseñanza de CCOO[3] en colaboración con el Instituto de la Mujer en el año 2011, con el fin de ayudar a profesores y profesoras de los Centros educativos de Enseñanza secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional en la tarea educativa. Para ello incluye un material con distintas herramientas con las que se pretende cubrir las insuficiencias de los libros de texto, sobre todo en los aspectos relacionados con la visibilidad de las mujeres y sus aportaciones a lo largo de la historia. Por otro lado, busca poder integrar todos estos aspectos en el currículo para conseguir una mejor formación para los alumnos y alumnas.

La base del proyecto es una colección de mujeres históricas matemáticas de las cuales se han desarrollado su contexto histórico y su biografía, además al finalizar cada bloque correspondiente a una mujer, se realiza una propuesta de ejercicios y problemas cuyo contenido está relacionado con ella.

Este proyecto ha sido el que más nos ha inspirado a la hora de realizar nuestro proyecto de innovación. Partiendo en base a unas directrices comunes, hemos conseguido realizar una herramienta didáctica distinta con la misma

[2] STEM: Science, Technology, Engineering and Math (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas).
[3] CCOO: Confederación Sindical de Comisiones Obreras (1976, Madrid).

finalidad, la cual nos permite aprender Matemáticas a la vez que concienciar a cerca de la igualdad de género a los alumnos y alumnas.

A continuación, vamos a hablar de aquellos aspectos del proyecto *Otras miradas* que hemos incorporado y nos han servido de base para la realización de nuestro proyecto.

- Ambos recogen una colección de mujeres matemáticas, la cual se va a presentar al alumno.
- Ambos incluyen apartados que tratan sobre los hechos históricos y biográficos más relevantes de la mujer matemática.
- Ambos incorporan ejercicios matemáticos con los que aprender y desarrollar varios contenidos del currículo.
- La finalidad de ambos proyectos es común. Por un lado, buscan que el alumno o alumna aprenda matemáticas, a la vez que se conciencia sobre las desigualdades sociales a las que se ha enfrentado la mujer a lo largo de la historia.
- Ambos proyectos buscan que su contenido sea incorporado al currículo, ya que se consideran aspectos de gran importancia, no sólo matemática, sino también social y cultural, que el alumno o alumna debe conocer.

Por otro lado, las características y aspectos más relevantes de nuestro proyecto son:

- Permite incluir, no solo figuras históricas famosas, sino también dar a conocer a cualquier mujer que esté relacionada con las matemáticas, de una época actual y dentro de cualquier ámbito educativo o laboral (alumnas, profesoras e incluso mujeres no matemáticas que dediquen su tiempo libre a practicarlas).
- Incluye una colección de problemas debidamente contextualizados, definiendo el curso sobre el que se va a llevar a cabo y los contenidos matemáticos que se van a desarrollar en él. A diferencia de *Otras miradas* que solo propone ejercicios relacionados con la mujer, nosotros hemos propuesto que la mujer sea la protagonista del problema, con el fin de dar importancia a su figura.

- Incluye apartados de utilidad para el docente, donde se analizan los problemas contextualizados.
- Contiene un mayor detalle acerca de cómo se va a llevar a cabo en el aula. Incluye medidas de atención a la diversidad, los recursos necesarios para su puesta en práctica y detalla cómo vamos a evaluarlo, además los objetivos están más especificados.

4. PROPUESTA DE INNOVACIÓN

La propuesta para el presente proyecto de innovación se basa principalmente en una colección de problemas contextualizados, los cuales han surgido como fruto de la invención, en los que la protagonista principal es una mujer matemática. Con ellos se pretende trabajar diversos contenidos matemáticos establecidos en el Real Decreto 19/2015 por el que se establece el currículo básico de Secundaria Obligatoria y en el Real Decreto 21/2015 por el que se establece el currículo de Bachillerato para la Comunidad Autónoma de La Rioja, a la vez que se da a conocer la vida y la importancia de estas mujeres en la ciencia.

Hemos escogido a 10 mujeres, de las muchas que existen. Cada una de ellas se corresponde con un bloque, en el cual están contenidos los problemas contextualizados. Dichos bloques se han estructurado de manera cronológica según el año de nacimiento de cada una de las mujeres. El orden es el siguiente:

1. Teano (s. IV a.C.)
2. Hipatia (335/370- 415)
3. María Gaetana Agnesi (1718-1799)
4. Sophie Germain (1776-1831)
5. Ada Lovelace (1815-1852)
6. Florence Nightingale (1820-1910)
7. Sofía Kovalevskaya (1850-1888)
8. Emmy Noether (1882-1935)
9. Katherine Johnson (1918-)
10. María Dolores Zapata (1959-)

4.1. Metodología

En el siguiente apartado se establece la metodología que vamos a seguir durante el desarrollo del proyecto, respondiendo a *Cómo* lo vamos a poner en funcionamiento dentro del aula.

La realización de estos problemas contextualizados la llevamos a cabo en las clases de matemáticas de los cursos correspondientes a Secundaria (1º, 2º, 3º y 4º de la ESO) y Bachillerato (1º de Bachillerato y 2º de Bachillerato). En el caso de 3º y 4º de la ESO debemos considerar si las matemáticas están orientadas a las ciencias académicas o aplicadas, mientras que, en el caso de

Bachillerato, debemos tener en cuenta si es Bachillerato Científico/Tecnológico u orientado a las Ciencias Sociales. Todo esto queda detallado más adelante, en el apartado *Atención a la diversidad (ver apartado 4.4).* Dentro de cada uno de los cursos, presentaremos a una o dos mujeres por unidad didáctica, con el propósito de que el alumno, al finalizar el curso, haya conocido y trabajado con al menos 12 mujeres matemáticas. Los perfiles matemáticos que vamos a presentar a los distintos cursos irán variando en función los contenidos que deseemos trabajar. Aun así, es posible que en cursos distintos realicemos problemas con las mismas mujeres matemáticas.

En cuanto a la temporalización del proyecto, dentro de cada unidad didáctica reservaremos una o varias sesiones de clases presenciales para trabajar los problemas contextualizados. En el caso de que el alumno no acabe el trabajo propuesto para su realización en clase o si surgen actividades derivadas del problema contextualizado (ejercicios de subir nota, ejercicios de ampliación, trabajos en grupo, *etc.*), todo ello lo deberá finalizar en casa.

Podemos clasificar de tres maneras diferentes, las sesiones dedicadas a la realización de los problemas contextualizados.

- En función de la continuidad de las sesiones.
    - Sesiones consecutivas. Los problemas son realizados en sesiones continuas en el tiempo, debido a su complejidad o longitud.
    - Sesiones alternas. Los problemas involucran distintos contenidos separados dentro de la misma unidad didáctica, por lo que las sesiones dedicadas a ellos estarán apartadas en el tiempo.
- En función de la ubicación de la sesión dentro de la unidad didáctica.
    - Al inicio de la unidad. Son problemas que nos permiten introducir y contextualizar la propia unidad didáctica.
    - A mitad de la unidad. Son problemas que involucran el desarrollo de diferentes contenidos matemáticos propios de la unidad didáctica.
    - Al final de la unidad. Son problemas que involucran todos los contenidos vistos durante la unidad didáctica. Este tipo de ejercicios sirven al alumno como instrumento de autoevaluación y repaso frente al examen.
- En función del tiempo dedicado al problema dentro de una sesión.

    - Sesión completa. Para la realización del problema invertiremos los 50 minutos que dura la sesión presencial.
    - Sesión partida. Para la realización del problema invertiremos menos de 50 minutos, utilizando solo una parte de la sesión presencial. Generalmente suelen ser ejemplos puntuales y problemas aclaratorios.

Por otro lado, podemos clasificar los problemas de la siguiente manera:

- En función de su finalidad.
    - Problemas introductorios. Los podemos utilizar al inicio de una unidad didáctica o al presentar algún concepto de ésta.
    - Problemas de repaso Los podemos utilizar frente a un examen o un concepto concreto. El contenido de los primeros es mucho mayor que el de los segundos.
    - Problemas que involucran matemática recreativa y juegos.
    - Problemas que nos permiten presentar al alumno contenidos matemáticos no incluidos en el currículo, trabajando contenidos matemáticos sí incluidos.
- En función de la distribución de los alumnos.
    - Problema individual. El alumno trabaja por su cuenta siguiendo las explicaciones del profesor, tomando apuntes y resolviendo los apartados del problema.
    - Problema por parejas. Son actividades de mayor complejidad, por tanto, agrupamos a los alumnos de dos en dos, con el fin de que trabajen de manera conjunta para agilizar las cuentas del ejercicio.
    - Problema por equipos. Suelen ser problemas de investigación, de ampliación, juegos o en los que tienen que trabajar de manera cooperativa para conseguir un resultado común.

Tal y como se hemos introducido en el apartado *Marco Teórico (ver apartado 3),* la metodología docente que utilizamos durante la realización de los problemas es activa/participativa*,* con el fin de dotar al alumno con las herramientas necesarias para que éste descubra los conceptos matemáticos por sí mismo favoreciendo su aprendizaje por descubrimiento*.* Una de las mejores opciones que nos permite implementar dicha metodología en el aula durante las sesiones de problemas es el uso del proyector en clase. Pero antes debemos elaborar una presentación de diapositivas que incluya información sobre la mujer y el problema a desarrollar durante la clase.

Para trabajar los problemas matemáticos contextualizados dentro del aula, vamos a seguir la siguiente dinámica:

1. Un preámbulo que nos sirve como presentación del tema a desarrollar. En esta parte hablamos sobre noticias de actualidad que aparecen en los distintos medios de comunicación e involucran temas de desigualdad de género.
2. Introducción del contexto histórico de la vida de la mujer protagonista del problema contextualizado.
3. Datos biográficos de la mujer protagonista, con el fin de que el alumno descubra algunos aspectos relevantes sobre la vida de estas importantes figuras. Durante esta sección vamos a preguntar en clase si algún alumno la conoce, de ser así le permitimos participar durante la presentación biográfica.
4. Desarrollo del problema. En esta parte vamos a poner especial énfasis en la participación activa de todos los alumnos y en su continuo seguimiento de la clase. Durante el ejercicio el alumno debe tomar sus propias conclusiones de lo aprendido, además puede trabajar de manera individual, en pareja o por equipos, depende de si el problema lo permite y la situación lo requiere.
5. Al finalizar el problema debemos recalcar la importancia que ha tenido la mujer matemática en la ciencia y sus aportaciones más relevantes al campo de las matemáticas (podemos repetir alguno de los datos que hayamos comentado con anterioridad en la presentación de la biografía). También contaremos a los alumnos anécdotas y datos curiosos sobre la vida de dicha mujer, además trataremos recomendar material literario o audiovisual adicional.
6. Finalmente vamos a exponer una conclusión basada en las barreras sociales a las que tuvo que enfrentarse la protagonista del ejercicio, debido a su condición de ser mujer, para poder brillar como matemática, con el fin de sensibilizar al alumno en la igualdad de género. Por último, les debemos

preguntar por las sensaciones originadas y las dudas que les han surgido a lo largo del problema.

Para facilitar el seguimiento del alumno durante la realización del problema, antes de comenzar la presentación de diapositivas, repartiremos una o varias fotocopias, elaboradas por nosotros mismos, con un resumen de todo lo que les vamos a contar y las preguntas del problema, las cuales el alumno debe responder en la fotocopia. Esta técnica permite asegurarnos de que los alumnos y alumnas reciban toda la información, ya que muchas veces si les dejamos copiar por su cuenta es muy probable que obvien alguna información. Además, pueden ampliar la información que les damos a partir de los comentarios que realicemos, añadiendo las anotaciones pertinentes a la ficha. Este formato de trabajo les permite acoplar con facilidad la información a los apuntes de la asignatura.

Durante la presentación del problema hacemos uso de materiales audiovisuales como imágenes verídicas de las mujeres; fragmentos de sus obras, manuscritos y cartas escritas por ellas; obras de arte en las que aparezcan; fragmentos de películas o documentales sobre sus vidas, *etc.*

En los últimos días del curso, vamos a proponer por grupos, hacer carteles de todas las mujeres estudiadas a lo largo de la asignatura, con el fin de presentarlos al resto de sus compañeros y decorar la clase. Si da tiempo, también vamos a proyectar alguna película biográfica recomendada durante el curso.

4.2. Estructura de la propuesta

El pilar fundamental del nuestro proyecto de innovación, a parte de los distintos problemas contextualizados, son las diferentes mujeres matemáticas protagonistas de los mismos. Por lo tanto, no buscamos solamente realizar un problema matemático para que los alumnos y alumnas aprendan y repasen los diferentes contenidos establecidos en el currículo, sino que también tratamos de complementar dicho problema con nociones históricas y bibliográficas de la mujer en cuestión. Por todo ello, hemos desarrollado un formato común a todas las mujeres con las que hemos realizando uno o varios problemas contextualizados, el cual está compuesto por los siguientes epígrafes: Contexto histórico, Bibliografía, Problemas contextualizados, Aportaciones a la ciencia, Observación del problema, Otros ámbitos y Conclusión.

Al inicio de cada bloque, antes de los epígrafes de cada mujer, mostramos una imagen en la que ésta aparece. En algunos casos son fotos legítimas mientras que en otros son imágenes procedentes de cuadros o esculturas, debido a su antigüedad. Acompañando a la imagen va una frase inspiradora, con un fin simbólico que nos permite resaltar la fuerza de la mujer en cuestión.

A continuación, vamos a desarrollar el contenido de cada uno de los epígrafes que componen cada uno de los bloques.

En el primer apartado vamos a presentar un breve resumen del Contexto Histórico en el que se sitúa la mujer matemática. En concreto exponemos los hechos más relevantes de la época, sobre todo dentro del país natal del personaje, dando especial importancia a las circunstancias que marcaron los principales sucesos históricos. En la mayoría de los casos detallamos algunos aspectos relacionados con la educación de la época, reivindicando sobre todo el papel de la mujer en las academias, escuelas y universidades. El contexto histórico le permite al alumno aprender algunos detalles de la época y comprender los distintos sucesos que marcaron la etapa en la que se desarrolló la vida de nuestra protagonista. Por otro lado, le permite analizar y juzgar todo aquello que sucedió en un periodo anterior, totalmente distinto y desde un punto de vista actual. Es bueno tener en cuenta el contexto histórico como referencia hacia lo que vamos a trabajar, ya que muchas veces nos permite entender los porqués de algunas de las ideologías, creencias, aspectos sociales, *etc.,* que puedan aparecer durante la presentación de la mujer o el desarrollo del problema.

El segundo apartado aborda la Biografía de la mujer matemática. En él explicamos los hitos más destacados de su vida, ordenados cronológicamente desde su nacimiento hasta su muerte, en el caso de que haya fallecido. En esta sección proporcionamos los siguientes datos: año y lugar de nacimiento; procedencia familiar, sobre todo la ocupación laboral de sus progenitores; su educación, especialmente cuando empieza a interesarse por las matemáticas;

algunas de las dificultades a las que tuvo que enfrentarse a lo largo de su vida; y finalmente, si se da el caso, año, lugar y causa de defunción. Utilizar la vida y la trayectoria de estas personas al inicio de la actividad, es clave para establecer un nexo de unión entre los estudiantes y el desarrollo del problema. Tanto la biografía como el contexto histórico son herramientas didácticas que nos permiten hacer la enseñanza más amena, despertando la curiosidad y el interés en los alumnos hacia las matemáticas.

No pretendemos aburrirle con muchos datos y nombres de personajes históricos, por ello intentamos presentar de forma resumida, los puntos más significativos de la vida y el contexto histórico de la mujer. Además, aquellos alumnos y alumnas interesadas pueden complementar ambos apartados con información adicional, realizando búsquedas sobre el tema y profundizando en la vida de estas mujeres matemáticas.

El siguiente apartado que hemos desarrollado son los Problemas Contextualizados. Hemos realizado uno o varios, problemas por mujer. Cada uno de ellos está dedicado a desarrollar varios contenidos concretos de una cierta unidad didáctica para un determinado curso. También intentamos relacionar el contenido del problema, si es posible, con alguna de las áreas matemáticas en las que haya visto involucrada la autora a lo largo de su vida, con el fin de asociar dicha mujer con una o varias unidades didácticas determinadas. La estructura de los problemas, por lo general, es la siguiente:

- Un título. Éste hace referencia al contenido del problema.
- Una introducción. Se corresponde con el enunciado del problema. Sirve para presentar a los personajes involucrados y el contexto del problema. Intentamos que todos los personajes, lugares, anécdotas que aparezcan a lo largo de la introducción y desarrollo sean reales. Esta introducción también la podemos utilizar para trabajar el mismo problema adaptado a niveles educativos diferentes.
- El desarrollo del problema. En él trabajamos unos determinados contenidos matemáticos. En algunos casos hacemos referencia a la igualdad de género, involucrando a la mujer protagonista en situaciones machistas. Esta parte es muy guiada, en la cual nosotros como docentes, debemos poner en práctica

la Metodología activa/participativa, explicando los distintos contenidos matemáticos con la continua intervención del alumno y favoreciendo en todo momento un constante retroalimentación. Podemos estructurar el desarrollo del problema de la siguiente manera:

- Si el problema está orientado a trabajar un único concepto dentro de la unidad didáctica, vamos a presentarlo en un único bloque.
- Si el problema está orientado a trabajar diferentes contenidos de la unidad didáctica, dividimos su desarrollo en distintas partes, tantas como conceptos matemáticos diferentes queramos explicar.
- Al finalizar el problema o alguna de sus partes, puede estar incluido la sección *Conclusión/es*. En éste, el alumno, saca sus propias conclusiones tras realizar el ejercicio, debe responder a varias preguntas teóricas sobre los contenidos del problema. Dicho apartado es clave para favorecer el *Aprendizaje por descubrimiento* en el alumno.

Este apartado es la parte más importante del trabajo, el núcleo sobre el que hemos construido el proyecto de innovación. Con la propuesta de los distintos ejercicios pretendemos ayudar al alumno en la comprensión de conceptos matemáticos y en la adquisición de procedimientos para la resolución de problemas, con el fin de mejorar su capacidad de razonamiento. Todo ello con el fin de aprender a plantear y resolver problemas matemáticos adecuadamente contextualizados que impulsen la coeducación, la utilización de un lenguaje no sexista y la obtención de valores críticos frente a la desigualdad de género.

El cuarto apartado trata sobre las Aportaciones de la mujer a la ciencia en general, pero sobre todo en el campo de las matemáticas. En él detallamos aspectos relacionados con su repercusión como mujer matemática y si a lo largo de su historia ha sido pionera en algún hecho relevante ("*La primera mujer en…").* Por otro lado, destacamos sus aportaciones a las matemáticas como: el campo de estudio e investigaciones, sus obras más destacadas, algún teorema, *etc*. También si ha creado algún invento y sus contribuciones a la ciencia en general, y finalmente si se ha dedicado al estudio de otras disciplinas científicas distinta a las matemáticas, como la filosofía, la astronomía, la política, *etc.* Esta sección nos permite recalcar la importancia de la mujer en el campo de las matemáticas. Pero en una dimensión más general, lo que conseguimos con este apartado es dotar al alumno con las herramientas necesarias que le permitan valorar de una manera positiva el papel de la mujer en la ciencia.

El quinto epígrafe se denomina <u>Observación del problema</u>. Como el mismo nombre indica, tratamos de presentar distintas aclaraciones a los problemas contextualizados. En él aportamos los datos referentes al curso o etapa al que va dirigido el problema. Por lo general, un problema suele estar enfocado a un único nivel educativo, a lo sumo dos si los contenidos de un curso sirven de repaso para los del siguiente. A su vez exponemos la unidad didáctica y los contenidos de ésta que deseamos trabajar a lo largo del desarrollo del problema. También indicamos a qué tipo de problema pertenece en función de su finalidad (*ver apartado 4.1).* Esta sección es de gran utilidad para el docente, ya que permite organizar la estructura del problema en función del curso y las unidades didácticas contenidas en el currículo. Por otro lado, se tiene en cuenta el número de problemas contextualizados que hemos realizado (uno o varios) y la división en partes de estos.

El sexto apartado lo hemos titulado <u>Otros ámbitos</u>. En él vamos a incluir algunas recomendaciones con el fin de crear nuevos problemas contextualizados en los que la mujer, con la que estamos trabajando, sea la protagonista.

- En primer lugar, debemos asociar, si es posible, a la mujer con uno de los bloques que aparecen en el currículo y que constituyen la asignatura de Matemáticas (Álgebra, Análisis, Geometría o Estadística y Probabilidad). No siempre es posible realizar esta relación debido a que el campo de estudio en el que se ha desenvuelto la mujer es demasiado avanzado para ser incluido en el currículo. Por otro lado, si ha realizado aportaciones matemáticas en más de una especialidad, podemos asociarla a varios bloques matemáticos.
- El siguiente paso es vincular a cada uno de los niveles educativos de Secundaria y Bachillerato, los posibles temas o unidades didácticas con los

que podemos crear los problemas en los que la protagonista sea dicha mujer. Los niveles educativos por asociar son: 1º de la ESO, 2º de la ESO, 3º de la ESO, 4º de la ESO, 1º de Bachillerato y 2º de Bachillerato.

En este apartado no diferenciamos entre matemáticas aplicadas y académicas (en 3º y 4º de la ESO), ni el tipo de bachillerato (Científico/Tecnológico y CCSS[4]), ya que para un mismo curso los nombres de los temas son parecidos, lo único que cambian son los contenidos. Sin embargo, este hecho queda resuelto en el apartado *Observación del problema*.

- En último lugar, proponemos otro tipo de ejercicios ya existentes, que sirven como ampliación al problema realizado. Por lo general son actividades que albergan nociones atractivas y curiosas para el alumno, y además utilizan matemática recreativa. Estos problemas permiten al alumno o alumna experimentar con aspectos de la vida real, jugar con los números e incluso realizar construcciones geométricas. El propósito es que aprenda matemáticas a la vez que se divierta, y a su vez encuentre un sentido útil y práctico para las matemáticas.

Esta sección es necesaria para la organización y clasificación de los problemas, ya que podemos utilizar un mismo ejercicio ajustándolo a distintos cursos y unidades didácticas.

Los apartados *Observación del problema* y *Otros ámbitos*, son una herramienta fundamental, ya que nos sirven como referencia para la creación de nuevos problemas contextualizados.

Finalmente realizamos una Conclusión con el fin de reivindicar la importancia de la mujer matemática. En este apartado vamos a detallar los siguientes aspectos:

- Anécdotas y curiosidades sobre su vida, ya sea en el campo de las matemáticas, la docencia o en su día a día. Ésta es una buena herramienta con la que el alumno puede complementar la biografía de la mujer. Además, aprender curiosidades y anécdotas, facilita al alumno la retención y memorización del personaje en cuestión.

---

[4] CCSS: Ciencias Sociales.

- Un texto breve que explique las dificultades a las que tuvo que enfrentarse para abrirse un hueco entre los hombres y sus características más destacadas, que hacen de ella una figura histórica de importancia, tanto a nivel matemático como a nivel social. Con esto intentamos inspirar al alumno, sensibilizándole en temas relacionados con la igualdad de género y permitiéndole comparar la situación de la mujer actual con la del problema.
- Finalmente, intentaremos recomendar material audiovisual adicional como: películas, documentales, libros, *etc.;* para que los alumnos interesados en el tema tengan alguna referencia con la que continuar aprendiendo sobre la vida y la importancia de dichas mujeres.

Este apartado sirve de clausura para cada uno de los bloques correspondientes a cada mujer matemática. Cabe destacar que los aspectos contenidos en los apartados *Aportaciones a la ciencia* y *Conclusión*, se mencionan al finalizar el problema contextualizado, dando especial consideración a aquellos datos más significativos que hacen única a la mujer.

4.3. Competencias

Durante la puesta en práctica del presente proyecto, se pretende trabajar todas las competencias básicas establecidas en la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, de la siguiente manera:

- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).** Lo que pretendemos con el presente proyecto de innovación es aprender matemáticas mediante la realización de problemas contextualizados y el uso de la Historia de las Matemáticas. Trabajando esta competencia, va a permitir al alumno aplicar un razonamiento matemático a la hora de resolver cuestiones de la vida cotidiana.
- **Competencias sociales y cívicas (CSC).** Hacen referencia al papel de la mujer en la sociedad actual y su evolución a lo largo de la historia. Trabajando estas competencias, pretendemos que el alumno se sensibilice y se implique con la causa en la lucha contra la desigualdad de género, haciéndole ver que su papel participativo en la vida social es clave como motor de cambio.

- **Conciencia y expresiones culturales (CEC).** En primer lugar, la contextualización histórica y la biografía de las mujeres matemáticas implican la utilización de nociones culturales. En segundo lugar, la realización de problemas geométricos nos permite desarrollar contenidos matemáticos usando ejemplos basados en arte y arquitectura. Y, por último, para trabajar esta competencia haremos uso de material audiovisual (libros, videos, películas, diapositivas, *etc.)* basado en la vida de las mujeres o en el tema a tratar.
- **Competencia para aprender a aprender (CPAA).** Esta competencia es una de las más importante para el alumno, ya que con la metodología utilizada durante la realización de los problemas debe ser capaz de desarrollar su capacidad para iniciar el aprendizaje, que a su vez éste sea significativo y además que todo lo aprendido perdure en el tiempo. Por otro lado, pretendemos que el alumno pueda organizar el trabajo, ya sea de manera individual o colaborativa, en función de los objetivos.
- **Comunicación lingüística (CCL).** Esta competencia se trabaja, por un lado, durante el desarrollo escrito y la lectura del problema; y por otro, en la presentación de la biografía y el contexto histórico de la mujer con la que se vaya a trabajar. Al ser una actividad muy guiada y participativa, pretendemos buscar la interacción entre el alumno y el profesor mediante una continua retroalimentación. Además, intentaremos que el alumno participe con otros alumnos, ya sea de manera oral o escrita.
- **Competencia digital (CD).** Esta competencia pretende dar a conocer al alumno el uso de las TIC en matemáticas, para ello le presentamos algún programa matemático que tendrá que utilizar para resolver problemas (*GeoGebra, Mathematica*, *etc.)*.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIE).** A través de la realización de los problemas contextualizados, buscamos desarrollar aspectos relacionados con la creatividad, la planificación y la capacidad de asumir riesgos. Pretendemos motivar al alumno para despertar su curiosidad

ante las matemáticas, con el fin de que éste complemente su aprendizaje de manera autónoma.

4.4. Atención a la diversidad

> *"La diversidad es una característica intrínseca de los grupos humanos ligada a diferencias en las capacidades, necesidades, intereses, ritmo de maduración, condiciones socioculturales, etc., abarcando un amplio espectro de situaciones"* (Gobierno de La Rioja, 2016).

La diversidad es un factor está presente, no solo a nuestro alrededor, sino también en cada uno de nosotros. Todos somos únicos a nuestra manera. Como dijo J. F. Kennedy (1963):

> *"Si no podemos poner fin a nuestras diferencias, contribuyamos a que el mundo sea un lugar apto para ellas."*

Es un hecho muy visible en la actualidad, sobre todo en los centros escolares, y nuestra obligación como docentes es valorar las posibles actuaciones que permitan la inclusión e integración de los alumnos en una escuela única para todos, sin discriminación y con las mismas oportunidades.

Como el presente proyecto de innovación va dirigido a los centros educativos, debemos atender aquellos aspectos relacionados con la atención a la diversidad en el ámbito escolar. Por un lado, es importante realizar las adaptaciones necesarias en el desarrollo y contenido del problema, en función de las necesidades que presentan los alumnos, con el fin de lograr un aprendizaje significativo. Por otro lado, debemos tener en cuenta la forma de trabajar en el aula y el papel del profesor en función del grupo de trabajo.

Las dimensiones en las que aplicamos las medidas de atención a la diversidad de nuestro proyecto dentro del centro son cuatro: a nivel de centro, a nivel de curso, a nivel de clase y a nivel individual. A continuación, detallaremos cada una de ellas.

- Medidas a nivel de centro. El proyecto de innovación es aplicable a todos los cursos de secundaria (1º, 2º, 3º y 4º de la ESO) y bachillerato (1º y 2º de Bachillerato), durante la asignatura de matemáticas. Para la creación de un problema contextualizado en un determinado curso, simplemente debemos seleccionar la unidad didáctica y los contenidos de ésta que queremos desarrollar. Cabe la posibilidad de que un mismo problema puede adaptarse a diferentes niveles, ajustando los contenidos al nivel que requiera dicho curso. Por otro lado, podemos adaptar un problema perteneciente al curso anterior con fines introductorios o de repaso (por ejemplo, usar un problema de 1º de bachillerato de derivadas para repasar en 2º de bachillerato al inicio del tema).

El lenguaje formal, oral y escrito utilizado y los datos históricos que presentamos como: fechas, personajes, obras y campo de estudio, entre otros, tendrán una mayor precisión y complejidad en los cursos más avanzados. También tenemos en cuenta el uso del lenguaje matemático durante el desarrollo del problema, sobre todo en los cursos más altos, ya que el alumno tiene un mayor dominio del mismo.

- Medidas a nivel de curso. Intentamos que los alumnos de un mismo curso realicen los mismos problemas contextualizados. Para cada nivel educativo tenemos en cuenta lo siguiente:
  - 1º de la ESO. Diferenciamos entre la asignatura de matemáticas ordinaria y las clases de refuerzo, en las que los alumnos que presentan mayor dificultad se ausentan durante la hora de matemáticas para trabajar con una PT[5].
  - 2º de la ESO. Diferenciamos entre la asignatura de matemáticas ordinaria y la clase de 2º de PMAR[6].
  - 3º de la ESO. Diferenciamos entre la clase de matemáticas orientadas a las ciencias aplicadas y las orientadas a las ciencias académicas. También el curso de 3º de PMAR.
  - 4º de la ESO. Diferenciamos entre la clase de matemáticas orientadas a las ciencias aplicadas y las orientadas a las ciencias académicas.
  - 1º de Bachillerato. Diferenciamos entre las matemáticas del bachillerato Científico/Tecnológico y el bachillerato de Ciencias Sociales.
  - 2º de Bachillerato. Diferenciamos entre las matemáticas del bachillerato Científico/Tecnológico y el bachillerato de Ciencias Sociales.

[5] PT: Maestro de Pedagogía Terapéutica.
[6] PMAR: Programa de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento.

En este tipo de adaptación, debemos tener en cuenta lo siguiente:

  - Como sabemos, el temario de matemáticas correspondiente a bachillerato es muy extenso, sobre todo en 2º. Por tanto, en función de cómo se vaya desarrollando el curso y el tiempo que dispongamos para cada unidad didáctica, realizaremos problemas de diversa duración.
  - Si en un mismo curso alguna de las clases se encuentra desfasada (atrasada o adelantada) con respecta a las demás, podemos adaptar los problemas reduciendo o ampliando su longitud y contenido, con el fin de lograr alcanzarlas.
  - Podemos realizar problemas agrupando varias clases de un mismo curso, adaptando el contenido de la actividad a un ámbito mayor.

- Medidas a nivel de clase. Para cada una de las clases de los distintos cursos debemos tener en cuenta las siguientes medidas de atención a la diversidad:
  - Determinar las necesidades más características de cada una de las clases, teniendo en cuenta el género, la edad, la procedencia y otros aspectos referentes al alumno.
  - La posibilidad de realizar un reagrupamiento flexible de las clases al comenzar el ejercicio en función de las necesidades y objetivos del problema contextualizado. Hay ejercicios en los que hay que trabajar de manera individual, por parejas o en equipos. La creación de equipos la estableceremos lo más equitativa y heterogénea posible, con el mismo número de chicos que de chicas, incluyendo personas con distintas capacidades.
  - Según el ritmo de aprendizaje de la clase realizaremos más o menos problemas contextualizados.
- Medidas a nivel individual. Son aquellas adaptaciones que aplicamos a un alumno en concreto. Podemos clasificarlas en función de la capacidad o en función de la motivación del alumno.
  - En función de la capacidad. Hay alumnos y alumnas que disponen de una mayor aptitud hacia las matemáticas que otros. A los más capaces les pedimos más durante el desarrollo del problema, aumentando la complejidad, cambiando el desarrollo del problema, e incluso haciéndoles

sacar algunas conclusiones que van más allá de lo establecido en los contenidos del curso. También les podemos plantear otras actividades relacionadas, con una dificultad matemática añadida. Por otro lado, para los alumnos menos capaces, los cuales presenta mayor dificultad, podemos emplear otros tipos de adaptaciones como:

- Adaptaciones en cuanto al tiempo de la actividad. Si el alumno tiene un ritmo de aprendizaje más lento, le dejaremos el tiempo necesario para realizar el problema y expresarse de manera adecuada. También dispone de tiempos de descanso entre las tareas.
- Adaptaciones en cuanto a las actividades. Los problemas contextualizados adaptados tienen las siguientes características:
  - Actividades breves que resulten atractivas, motivadoras y útiles para el alumno.
  - Problemas divididos en partes más sencillas y en algunos casos eliminamos las partes de mayor dificultad.
  - Las explicaciones e instrucciones para la realización del problema son muy claras y guiadas.
  - Adaptamos los problemas a los contenidos y objetivos correspondientes.
- Adaptación en cuanto a la metodología. Tal y como hemos planteado anteriormente (*ver apartado 3.1)*, el *Aprendizaje por descubrimiento* es una estrategia que permite al alumno construir su propio conocimiento y cumplir así con los objetivos establecidos para la actividad. Por tanto, convendría que el alumno trabaje con ayuda especial por parte del profesor y sus compañeros, y así fomentar su autonomía e iniciativa personal. Estas ayudas, necesarias al principio, las vamos a ir retirando de forma progresiva. Si creemos conveniente, podemos repetirle las explicaciones la veces que sean necesarias, con el fin de que el alumno comprenda los conceptos.
- Adaptación en cuanto a los recursos. El uso de material complementario ayuda al alumno a comprender los conceptos desarrollados durante el problema contextualizado.

- En función de la motivación del alumno, podemos organizar problemas optativos para subir nota con el fin de que el mismo siga aprendiendo y aumentando sus conocimientos sobre la mujer a estudiar.

El orden con el que debemos poner en práctica las adaptaciones curriculares, en el caso de que el alumno tenga dificultades a la hora de desarrollar la actividad, es el siguiente:

1. Medidas a nivel de clase. Como por ejemplo cambiarlo de sitio o de grupo de trabajo para mejorar su productividad.
2. Adaptaciones en cuanto a los recursos. Utilizar recursos que capten su atención, permitan que se centre y faciliten su aprendizaje.
3. Adaptaciones en cuanto al tiempo de la actividad. Dejar un margen de tiempo mayor en la resolución del problema.
4. Adaptaciones en cuanto a la metodología. Proporcionar un mayor apoyo por parte del profesor, o incluso permitir la participación de un profesor ajeno que le ayude de manera exclusiva.
5. Adaptaciones en cuanto a las actividades. Adecuar los contenidos del problema a sus necesidades (es un tipo de adaptación curricular especializada). Ésta es la última de las medidas que debemos poner en práctica.

El propósito de este apartado es poner en práctica el proyecto de innovación para el número máximo de alumnos posibles dentro de un centro escolar.

Como la igualdad de género es un tema que nos concierne a todos, es importante que lo trabajemos en los distintos ámbitos y niveles, eso sí a diferentes escalas, teniendo en cuenta en todo momento el contexto que rodea al alumno. Este proyecto, en particular, nos permite llevar a cabo adaptaciones en los problemas sin demasiada complicación.

4.5. Evaluación

La evaluación es un tema muy abierto y complejo, ya que cada profesor tiene su propia forma de evaluar. Ésta se forja a lo largo de su experiencia, además influyen aspectos como la personalidad, la idiosincrasia y las expectativas de cada persona. Por eso, cuando dos docentes intentan comparar su manera de evaluar, ambos adoptan una posición protectora frente al otro, defendiendo con uñas y dientes, sus criterios y sistema de evaluación.

Para Howson, Keitel y Kilpatrick (1981):

> *"Evaluar es un proceso que juzga el valor o mérito de algo. Para evaluar, se necesita un objeto, una escala de valores y algunos medios de reunir información acerca del objeto tal que la escala de valores pueda ser aplicada a la información".*

Tenbrink (1981) define la evaluación de la siguiente manera:

> *"La evaluación es el proceso de obtención de información y usarla para formar juicios que a su vez se utilizarán en la toma de decisiones".*

La evaluación es un proceso que va *de la mano* con el aprendizaje, ya que no es posible un aprendizaje sin evaluación ni una evaluación sin aprendizaje. No solo calificamos al alumno con una nota y unos baremos, sino que además nos permite, como docentes, constatar cuales son las necesidades prioritarias en el alumno, que debemos atender y reforzar. Por otro lado, la evaluación permite al alumno consolidar conocimientos y alcanzar los objetivos establecidos durante la actividad matemática.

4.5.1. Evaluación del alumno

A continuación, vamos a detallar la manera de evaluar al alumno a lo largo de la actividad propuesta. Para ello, debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Principalmente que el alumno alcance los objetivos propuestos al inicio del proyecto de innovación: el aprendizaje de las matemáticas y la concienciación sobre la igualdad de género (*ver apartado 2).*
- El trabajo diario realizado en clase y en casa.
- El comportamiento durante el desarrollo del problema.
- La participación activa (preguntas, feedback, *etc.)*.
- El nivel de autonomía personal en el estudio, a raíz de la metodología Aprendizaje por descubrimiento.
- Trabajo optativo por cuenta del propio alumno como ampliación de los problemas.

- Realización de problemas propuestos por el profesor, que surjan a partir del problema hecho en clase.
- La capacidad de trabajar individualmente, en pareja o por equipos.

La realización del seguimiento de la actividad la podemos realizar dentro de tres niveles diferentes:

- Seguimiento en vivo. Lo realizamos a tiempo real en las sesiones de problemas. Debemos prestar atención a la dinámica del grupo, observar cómo trabajan y participan cada uno de los alumnos y alumnas.
- Examen. El día de la evaluación escrita incluimos algún problema contextualizado que incluya alguna pregunta sobre la historia y biografía de las mujeres. Éste nos permite saber el grado de conocimientos que ha adquirido el alumno durante las clases de problemas contextualizados.
- Portafolios final. Éste está compuesto por el material que le entregamos al alumno, el cual debe completar y complementar con la información que les proporcionamos durante el desarrollo del problema. Este seguimiento lo realizamos aproximadamente de manera mensual. Durante el día del examen recogemos todas las fichas de mujeres, correspondientes a las unidades didácticas de las cual el alumno se haya evaluado, y así poder proceder a su evaluación y corrección. En el caso de 1º, 2º y 3º de la ESO estas fichas irán adjuntas al cuaderno de la asignatura, mientras que en los cursos de 4º de la ESO, 1º y 2º de Bachillerato, recogeremos exclusivamente las fichas de problemas contextualizados. Este formato nos permite valorar el aprendizaje y la autonomía del alumno a la hora de estructurar los apuntes y tomar anotaciones.

Tras determinar cómo vamos a realizar el seguimiento del proyecto, cabe dar respuesta a la pregunta de *Cómo evaluar* el proyecto. Para ello hay que tener en cuenta distintos aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje. En primer lugar, la ejecución del proyecto va dirigida a un instituto, en el cual la evaluación es continua. Por tanto, podemos aprovechar la realización de las distintas pruebas escritas trimestrales para evaluarlo. En cada uno de estos exámenes incluimos un problema adecuadamente contextualizado, relacionado con las mujeres con las que se ha trabajado previamente. Éste tiene dos partes: una numérica en la que preguntamos acerca de los contenidos a examinar y la cual influye en la nota del examen; y otra donde preguntamos sobre la historia y bibliografía de la mujer matemática, la cual sirve para subir la nota (nunca la bajará).

En segundo lugar, como el nivel de aprendizaje no es el mismo en todos los alumnos, debemos tener en cuenta los aspectos relacionados con la atención a la diversidad a la hora de evaluar, realizando las siguientes adaptaciones curriculares pertinentes:

- No significativas.
  - Valoramos las actuaciones que el alumno tenga en clase como: participación activa, capacidad de trabajar con los demás compañeros.
  - Informamos a los familiares sobre los avances y dificultades que surjan durante la realización de problemas.
  - Adaptamos los problemas contextualizados de las pruebas escritas a las capacidades del alumno. Esto nos es de utilidad para poder informarle en sus avances y dificultades.
  - Debemos tener en cuenta que el cuaderno de trabajo (hojas de problemas) esté completo y organizado en medida de lo posible.
  - La calificación del trabajo adicional o a realizar en casa, depende de las capacidades del alumno
  - Observar el comportamiento en clase y su relación con el profesor y el resto de compañeros.
- Significativas. Las realizamos desde la programación, con un previo informe evaluativo psicopedagógico.
  - Adecuación de los criterios de evaluación.
  - Priorización de los criterios de evaluación.
  - Cambio en la temporalización de los criterios de evaluación.
  - Eliminación e incorporación de algún criterio de evaluación.

Para evaluar el aprendizaje por descubrimiento en el alumno, ya sea de manera individual o por grupos, deben rellenar la Tabla 1 al finalizar las sesiones de problemas. Sirve como una manera de autoevaluar los conocimientos aprendidos. Los apartados de la Tabla 1 a los que deben responder son los siguientes:

- *Problema*. Deben introducir el nombre del problema que se ha realizado.
- *Lo que sabíamos*. Algunas nociones y conocimientos previos que son necesarios para el desarrollo de la actividad.
- *Lo que necesitamos aprender.* En esta columna deben indicar los objetivos del problema determinados por el profesor.
- *Lo que hemos aprendido*. Una vez acabado el problema permite responder a cerca de los conocimientos adquiridos poniendo en práctica el aprendizaje por descubrimiento.

Problema	**Lo que sabíamos**	**Lo que necesitamos aprender**	**Lo que hemos aprendido**

Tabla 1: Evaluación del Aprendizaje por descubrimiento.

Los estudiantes pueden tener diferentes puntos de vista en lo aprendido, pero en general deben seguir las mismas directrices, aludiendo al tema desarrollado durante el problema.

Para evaluar y calificar los problemas (una ficha) y el portafolios final (agrupación de todas las fichas que se entregan al finalizar el curso), hemos desarrollado la rúbrica que aparece en la Tabla 2, en la que tenemos en cuenta aspectos como: la presentación del portafolios, el texto y la expresión, los contenidos del problema y el trabajo de ampliación.

Una vez determinado como vamos a llevar a cabo el proyecto, debemos dar respuesta a la pregunta *Qué evaluar*. Ya hemos hablado a lo largo del presente apartado, de algunos aspectos clave que vamos a tener en cuenta a la hora de evaluar al alumno. Los elementos y variables que nos son de utilidad para calificar al alumno, tras la puesta en práctica del proyecto de innovación, son los siguientes:

- El comportamiento del alumno durante las sesiones de problemas. El mal comportamiento puede influir negativamente en su nota final.
- La participación activa del alumno durante las sesiones de problemas. Debemos tener en cuenta que éste realice preguntas de interés general relacionadas con el tema, que pregunte dudas sobre los contenidos y

procedimientos que se estén desarrollando y que cuente a los demás, cosas que sepa sobre el tema.

- El trabajo realizado durante las sesiones. Que el alumno tome apuntes y realice los ejercicios de manera adecuada. Valoramos también las fortalezas, los talentos, las cualidades, los obstáculos, los problemas o las debilidades que puedan surgir en el alumno, ya sea trabajando de manera individual o grupal.
- El trabajo autónomo en casa. La parte del problema que no da tiempo a finalizar en clase la debe realizar por su cuenta en casa. Además, tiene la obligación de entregarla o enseñarla al profesor el próximo día de clase.
- El ejercicio contextualizado del examen. Como hemos dicho anteriormente, durante las sesiones de evaluación escrita incluimos un problema contextualizado (dividido en dos partes). el cual el alumno debe resolver.
- Las fichas de problemas de cada mujer las recogemos después de cada una de las sesiones de evaluación escrita, y procedemos a su calificación siguiendo los criterios contenidos en la Tabla 2.
- El portafolios final lo recogemos el día del último examen de la asignatura, y lo procederemos a su calificación siguiendo los criterios contenidos en la Tabla 2.
- Trabajos optativos y de ampliación. Generalmente este tipo de ejercicios tienen un valor añadido en cuanto a la dificultad, y ayudan al alumno a ampliar sus conocimientos respecto al tema a trabajar. Los ejercicios optativos sirven para subir nota, en ningún caso bajarla. Sin embargo, la no realización de los ejercicios de ampliación influencia negativamente la nota del portafolios, y en consecuencia la nota final.

En último lugar vamos a dar respuesta a la pregunta *Cuándo evaluar*, es decir cuando realizar la evaluación del alumno. Hay tres dimensiones temporales donde vamos a llevar a cabo la acción de evaluar.

- Evaluación a tiempo real, durante la clase de problemas contextualizados. Para ello consideramos factores como: el comportamiento, el trabajo en clase y en casa, la autonomía personal y la capacidad de trabajar de manera individual o por equipos.

- Evaluación mensual/trimestral. Por un lado, en la realización de los problemas contextualizados contenidos en los exámenes, y por otro lado a través de las fichas de problemas que se recogen el día de evaluación escrita. Todas las calificaciones mensuales, junto con la evaluación a tiempo real, serán imprescindibles para establecer la evaluación trimestral del proyecto.
- Evaluación final, al acabar el curso. Evaluamos principalmente el portafolios final con todas las fichas de ejercicios. También podemos tener en cuenta la realización de las presentaciones o trabajos grupales que puedan surgir al finalizar el curso. Como la evaluación es continua, son de gran importancia para esta evaluación todas las calificaciones trimestrales del proyecto.

	Rúbrica para evaluar los problemas.			
Nivel	**Presentación**	**Texto**	**Contenidos**	**Trabajo ampliación**
4: Muy Bueno	El portafolios está presentado con claridad, con su título e índice, las hojas numeradas, en una funda de plástico *etc.*	Texto claro y con un nivel gramatical adecuado. Presenta títulos, subtítulos y no tiene faltas de ortografía. Importante la buena expresión.	Todos los problemas están presentados y realizados de manera correcta y bien explicada. El contenido está debidamente organizado facilitando la comprensión	Ha realizado todas las tareas adicionales propuestas tras el problema, de manera correcta. Importancia de las fuentes adecuadamente citadas.
3: Bueno	El portafolios está presentado con claridad, pero no cumple alguno de los formatos de entrega.	Texto principalmente claro, con títulos y subtítulos. Presenta pocas faltas de ortografía y fallos en la expresión.	La mayoría de los problemas están presentados y realizados. El contenido está debidamente organizado facilitando la comprensión.	Ha realizado la mayoría las tareas adicionales propuestas tras el problema, de manera correcta. Algunas fuentes fueron citadas.
2: Suficiente	El portafolios se entrega desordenado, pero cumple algunos puntos del formato de entrega.	Texto poco claro, ausencia de algunos títulos y subtítulos. Presenta varias faltas de ortografía y fallos en la expresión.	Faltan algunas anotaciones y problemas importantes. El contenido está ordenado y claro.	Realiza al menos una de las tareas adicionales, pero la mayoría de la información está copiada y no cita las fuentes.
1: Insuficiente	El portafolios está en muy mal estado, o no se entrega.	Texto poco claro, faltan la mayoría de los títulos y subtítulos, mala expresión y muchas faltas de ortografía.	Faltan la mayoría de los problemas, poca organización y muy desordenado.	No realiza tareas adicionales. Copia toda la información sin citar las fuentes.

Tabla 2: Rúbrica para la evaluación de los problemas contextualizados.

4.5.2. Evaluación del proyecto

Una buena ejecución del proyecto de innovación es una condición necesaria para estar satisfecho, pero no suficiente, es decir, siempre tenemos que estar dispuestos a mejorar y perfeccionar todos los aspectos involucrados en el proyecto, con el fin de obtener mejores resultados. Por tanto, al finalizar el proyecto (al final del curso), debemos responder a las preguntas que aparecen en la Tabla 3 a modo de autoevaluación.

Preguntas esenciales para autoevaluar el proyecto por parte del docente			
1	¿Es eficaz la innovación llevada a cabo?		
2	¿En qué medida es eficiente?		
	a	¿Qué resultados hemos conseguido?	
	b	¿Son difíciles de conseguir?	
	c	¿Se ha finalizado el proyecto?	
	d	¿Cuál ha sido su impacto en el alumno?	
	e	Estudio de satisfacción (encuesta al alumnado)	
	f	Evaluación de logros	
	g	Análisis de resultados sobre el alumno	
		i	Efectos esperados
		ii	Resultados no esperados
		iii	Efectos sobre el entorno
		iv	Efectos colaterales y coyunturales
	h	Análisis de eficiencia	
		i	Valoración del esfuerzo y si ha merecido la pena
		ii	Valoración de la productividad de los problemas
Reflexión final respondiendo a las siguientes preguntas: ● ¿Cómo ha trabajado el profesor? Importancia de su papel. ● ¿Cómo se han desarrollado las clases de problemas? ¿Y el proyecto en general? ● ¿Qué objetivos se han logrado cumplir de todos los propuestos? ● ¿Qué objetivos NO se han logrado cumplir de todos los propuestos? ● ¿Qué se debe mantener del proyecto? ● ¿Qué se debe modificar a mejor del proyecto? ● ¿Qué se debe eliminar del proyecto?			

Tabla 3: Autoevaluación del proyecto para el docente.

5. APLICACIÓN DE LA PROPUESTA

Con la realización de los problemas contextualizados pretendemos abarcar todos los cursos y todos los bloques de la asignatura de Matemáticas establecidos en el currículo de la ESO y Bachillerato. En el *Anexo II* podemos encontrar los diferentes bloques correspondientes a las 10 mujeres matemáticas seleccionadas, los cuales hemos organizado siguiendo la estructura definida en la *Propuesta de Innovación (ver apartado 4.2)*. **Nota:** Las soluciones a todos los problemas creados las podemos encontrar en el *Anexo III.*

En esta sección vamos a realizar un análisis exhaustivo de uno de los 10 bloques realizados. Para ello vamos a descomponer el problema seleccionado indicando cada uno de los aspectos más relevantes explicados anteriormente en el *apartado 4.*

5.1. Katherine Johnson

"La calculadora humana"

5.1.1. Contexto histórico

Tras el fin de la I Guerra Mundial, Estados Unidos se sumerge en un periodo denominado "*Los felices años 20".* Fue una época de prosperidad y crecimiento económico, que finalizará en 1929 con la caída de la Bolsa de Nueva York (*Crack del 29)*, sumiendo a Estados Unidos en una gran depresión. Destacan hechos históricos como la instauración de la Ley Seca y el derecho de la mujer al voto.

Entre los años 1920 y 1930, el crecimiento económico permitió a muchas mujeres de clase media trabajar como maestras, secretarias y algunos oficios temporales. Por otro lado, aumentó la tasa de mujeres matriculadas en la universidad. Esta etapa es considerada como una época de plena segregación racial, en la cual se aprobaron leyes que defendían la separación de espacios y servicios en función de la descendencia y el color de piel. Es por ello, que la población afroamericana lo tenía mucho más difícil a la hora de labrarse una educación completa, ya que por lo general no estudiaban más del octavo curso en su condado natal. En consecuencia, ocupaban los puestos de menor cualificación.

5.1.2. Biografía

Katherine Johnson nació en 1918 en Virginia Occidental (EE.UU.), en el seno de una familia afroamericana. Los padres de Katherine decidieron que sus hijos recibieran una buena educación, enviándoles a un colegio exclusivo para personas de color.

Desde muy pequeña mostró aptitudes en matemáticas. A los 18 años se graduó en Matemáticas y Francés por la escuela de estudios superiores *West Virginia State College*. Tras finalizar sus estudios se puso a trabajar como profesora, fue entonces cuando sufrió las consecuencias del racismo por primera vez.

En 1953 entró a trabajar a la NASA como "*Calculadora*[7]", donde se encargaba de realizar todas las operaciones y comprobaciones de cálculo que requerían los ingenieros aeronáuticos. Motivada por la curiosidad fue acudiendo a reuniones con dichos ingenieros, dónde comenzó a destacar, no solo por sus conocimientos, sino también por sus capacidades de liderazgo. Jugó un papel de vital importancia, en proyectos espaciales como el *Apollo 11, Proyecto Mercury y Apollo 13*.

---

[7] Las Calculadoras de la NASA: fue un puesto de trabajo de la NASA generalmente formado por mujeres de color. Éstas se dedicaban a la realización de las operaciones matemáticas antes de la llegada de los ordenadores.

Actualmente, se dedica a dar charlas entre jóvenes, especialmente mujeres, sobre la importancia de luchar por los sueños por encima de todo. Y las anima a que estudien ciencia y tecnología.

5.1.3. Problema contextualizado

<u>“Las derivadas, el camino hacia la Luna”</u>

PARTE 1:

La NASA[8] ha encomendado a Katherine Johnson una tarea muy importante que va a ser crucial para la misión de enviar el primer hombre a la Luna. En la construcción del Apollo 11, la nave con la cual Neil Armstrong logrará alcanzar el satélite, son necesario costos materiales y arduos cálculos matemáticos. En particular la parte más cara del proyecto es el tanque de combustible de la nave. Éste es un recipiente cilíndrico cuya capacidad es de 160 millones de litros de hidrógeno líquido como el que aparece en la Figura 1. La tarea encomendada para esta gran matemática es calcular las dimensiones del tanque de combustible para que los materiales utilizados en su construcción sean mínimos. ¿Cuál es el área del tanque?

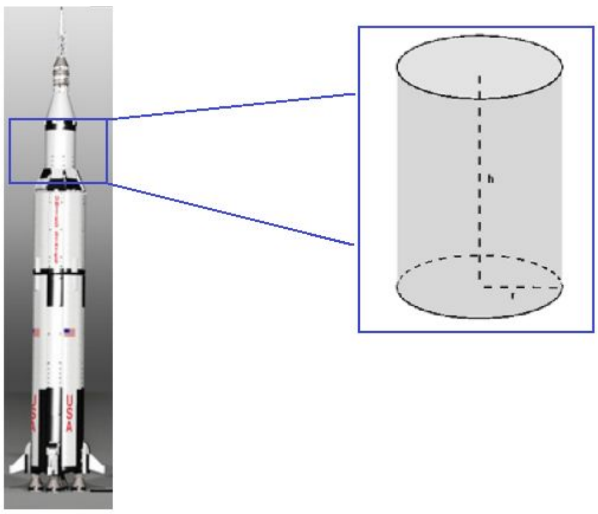


Figura 1: El Apollo 11 y el tanque de combustible que debemos optimizar.

PARTE 2:

Tras el exitoso despegue del Apollo 11, toda la NASA está de celebración, incluida Katherine Johnson, ya que sin ella esta misión no hubiera sido posible.

[8] NASA: Administración Nacional de Aeronáutica en el Espacio (EE.UU.).

¡Un momento! Parece que algo va mal. Durante el despegue la nave ha perdido combustible, debido a una fuga en el depósito. La única manera de que la expedición lunar continúe su rumbo, es haciendo que la nave de una vuelta completa a la órbita alrededor de la Tierra y así, gracias a las fuerzas gravitacionales del planeta, coja el impulso necesario para llegar hasta la Luna.

De inmediato, el jefe de la NASA se acerca a Katherine y le pide que realice las tareas de cálculo necesarias para recalcular la nueva trayectoria de la nave. Ésta sin perder un instante de tiempo, saca un mapa de coordenadas de un cajón y se pone a recopilar algunos datos.

La órbita alrededor de la Tierra tiene la forma de una elipse. Sabemos que la Tierra está centrada en el punto de coordenadas espaciales $C(5,1)$ *y los focos se corresponden con dos observatorios espaciales que la NASA dispone en el ecuador terrestre. Uno situado en el punto más al este* $E(3,1)$ *y el otro en el punto más al oeste* $O(7,1)$ *del globo terráqueo. Sabemos que actualmente la nave se encuentra en órbita, ya que manda señales de alerta a ambos observatorios. Tras analizar las señales, se sabe que la distancia del punto de la órbita, donde se encuentra la nave, al foco del este es de 2 unidades, y la distancia al foco del oeste es de 6 unidades.*

1. *Calcula la ecuación de la órbita elíptica en la que se encuentra la nave. Indica todos los elementos de la elipse. Haz un dibujo aproximado.*
2. *¿En qué punto de la órbita elíptica se encuentra la nave?*
3. *Para que la nave llegue a la Luna siguiendo una trayectoria recta y tangente, ésta debe desengancharse de la órbita elíptica en el punto de abscisas* $x=3$. *¿Es única la recta tangente? Calcula la ecuación de las posibles rectas tangentes.*
4. *Katherine sabe que a esta hora del día y en esta época del año, la Luna se encuentra sobre el eje de abscisas. Si sabemos que la nave orbita alrededor de La Tierra en sentido positivo, y se desengancha de la órbita en el punto de abscisas* $x=3$. *Calcula las coordenadas espaciales de la Luna.*

Tras restablecer todos los datos y las trayectorias. La misión espacial concluyó de manera exitosa. Los astronautas consiguieron llegar a su destino y volver a la Tierra sanos y salvos. El astronauta Neil Armstrong dedicó a

Katherine unas palabras desde la Luna: "¡Es un pequeño paso para las matemáticas, pero un gran paso para la figura de la mujer en la ciencia!"

5.1.4. Aportaciones a la ciencia

Katherine Johnson contribuyó al desarrollo de varios programas espaciales de la NASA en EE.UU. Podemos afirmar que sin sus cálculos el hombre no hubiera pisado la Luna.

El hecho de dejar atrás su puesto de "*Calculadora*", un trabajo condicionado a mujeres de color, y conseguir un puesto de trabajo de mayor importancia, implicó el fin de las barreras de género y raciales dentro de una institución tan importante como es la NASA. Esto supuso un gran paso hacia la igualdad en aquella época.

5.1.5. Observación del problema

El problema: "Las derivadas, el camino hacia la Luna", es una actividad dirigida a alumnos de Bachillerato, en especial a alumnos de 1º de Bachillerato Científico/Tecnológico. Con ella pretendemos trabajar la unidad didáctica de Cálculo de derivadas y sus aplicaciones. El problema tiene dos partes, la primera es un ejercicio de optimización; y la segunda está basada en el cálculo de la recta tangente a una cónica (elipse) mediante el uso de derivación implícita.

5.1.6. Otros ámbitos

Katherine Johnson es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas, en concreto aquel relacionado con la astronomía. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de diversas unidades didácticas para los distintos cursos. Generalmente serán unidades didácticas del bloque de Geometría (analítica) y Análisis.

- 1º de la ESO: Gráficas y funciones.
- 2º de la ESO: Gráficas y funciones.
- 3º de la ESO: Movimientos en el espacio, Gráficas y Funciones.
- 4º de la ESO: Funciones y Ecuaciones.

- 1º de Bachillerato: Vectores y producto escalar, Ecuaciones, Lugares Geométricos, Sucesiones, Límites, Cálculo de derivadas y sus aplicaciones y Representación gráfica.
- 2º de Bachillerato: Todo el bloque de Geometría analítica (matrices, determinantes, puntos, rectas, planos, *etc.)* y todo el bloque de Análisis (límites, derivadas, integrales, *etc.)*.

También podemos incluir a Katherine Johnson como protagonista de varias actividades recreativas como acertijos y paradojas matemáticas.

- La paradoja del giro de la Luna.
- Una actividad muy útil para los cursos de la ESO es la de cálculo mental. La realizaremos una vez por semana y en un minuto de tiempo el alumno debe resolver el número máximo de operaciones dadas.

5.1.7. Conclusión

Una curiosidad sobre Katherine es que todo lo contaba, desde los pasos que daba hasta los platos que fregaba. Por ello sus allegados le llamaban de forma cariñosa: *"la niña calculadora".*

Otro dato curioso a destacar, es que fue la única mujer seleccionada para realizar estudios de postgrado en la Universidad de Virginia, pero debido a problemas familiares no consiguió acabar sus estudios.

Con una enorme pasión por las matemáticas, gracias a las cuales logró acabar con las barreras raciales y de género, Katherine Johnson es considerada una leyenda de los viajes espaciales. Fue capaz de alcanzar la Luna, con la ayuda de un lápiz, un papel y una calculadora.

En 2016 se estrenó "*Figuras ocultas*" (Melfi, 2016), una película muy inspiradora que relata la realidad por la que tuvo que pasar Katherine durante su estancia en la NASA.

5.2. Análisis del problema contextualizado

5.2.1. Metodología del problema

Siguiendo las directrices del *apartado 4.1,* en la siguiente Tabla 4 aparecen diferentes datos relevantes sobre la organización del bloque referente a Katherine Johnson.

Nombre de la Autora	Katherine Johnson		
Número de problemas	Un único problema dividido en dos partes		
Curso	1º de Bachillerato	**Modalidad**	Científico/Tecnológico
Unidad didáctica	Cálculo de derivadas y sus aplicaciones		
Trimestre	3º trimestre		
Recursos	Proyector, presentación de diapositivas, varias fichas con la información y el ejercicio a realizar. Imágenes de Katherine Johnson y algún fragmento de la película *Figuras Ocultas*.		

Tabla 4: Datos específicos del bloque dedicado a Katherine Johnson.

Podemos clasificar el problema en función de su temporalización dentro de las sesiones de la siguiente manera:

- En función de la continuidad de las sesiones. El problema puede realizarse en dos sesiones alternas, ya que trabajamos dos contenidos separados dentro de la unidad didáctica. En la primera sesión realizamos la parte correspondiente a Optimización (parte 1 del problema), y en la segunda los contenidos referidos al cálculo de rectas tangentes (parte 2 del problema). También es posible realizarlo en dos sesiones continuas en el tiempo, todo dependerá de la finalidad del problema.
- En función de la ubicación de la sesión dentro de la unidad didáctica. Como es un problema que involucra el desarrollo de varios contenidos, su situación dentro de la unidad didáctica puede variar. Generalmente los contenidos de Optimización y el cálculo de rectas tangentes los impartimos hacia el final de la Unidad Didáctica.
- En función del tiempo dedicado al problema dentro de una sesión. Para cada una de las partes de este problema vamos a invertir menos de 50 minutos de cada una de las dos sesiones establecidas para su realización. Esto es

debido a que antes de comenzar el problema, hacemos una introducción teórica explicando el contenido a trabajar durante el problema. En el caso de la parte de Optimización, explicamos con anterioridad aspectos sobre la Investigación Operativa, que es optimizar, cuáles son los mejores recipientes, como realizar los problemas de Optimización, *etc.* Mientras que para el caso de cálculo rectas tangentes, les enseñamos lo que es la derivación implícita y repasamos algunos contenidos, que vamos a necesitar, de la unidad didáctica Lugares geométricos.

También podemos clasificar el problema en función de lo siguiente:

- Según su finalidad. Es un problema introductorio que nos sirve como ejemplo una vez explicados los contenidos teóricos.
- Según la distribución de los alumnos. El alumno debe trabajar de manera individual durante el desarrollo de las dos partes, tomando los apuntes necesarios y participando de manera activa.

Al trabajar con dos contenidos totalmente nuevos para el alumno, el desarrollo del problema es muy guiado. Por ello, debemos explicarles detalladamente cada uno de los pasos que deben tomar para llegar a la solución final del ejercicio. Además, favorecemos la participación del alumno durante el problema y a la creación de una continua retroalimentación sobre las dudas que le puedan surgir. Por otro lado, con los recursos que usamos durante la exposición (ver Tabla 4) y las fichas de problemas, ponemos en práctica el aprendizaje por descubrimiento en el aula, favoreciendo a que el alumno pueda sacar sus propias conclusiones una vez finalizado el ejercicio.

El problema *“Las derivadas, el camino a la Luna”* lo desarrollamos en el aula de la siguiente manera:

- En primer lugar, realizamos una explicación teórica, presentando los contenidos relacionados con los problemas de optimización y el cálculo de rectas tangentes.
- Durante el preámbulo inicial mostramos varias noticias de actualidad relacionadas con la desigualdad de género en el mundo laboral o el racismo hacia la mujer.

- Acto seguido introducimos a Katherine Johnson, la mujer con la que vamos a trabajar, para ello preguntamos si algún alumno la conoce, de ser así, le permitimos participar durante la introducción al problema, dejándole contar todo lo que sepa sobre ella. A continuación, con ayuda del proyector, les mostramos algunos aspectos, imágenes, datos, *etc.,* relacionados con su contexto histórico y su biografía.
- Una vez presentada a la protagonista del problema, comenzamos a desarrollarlo en conjunto con el alumno, siguiendo la metodología elegida (*ver Apartado 3.1)*. Éste debe trabajar de manera individual.
- Tras finalizar el problema, debemos recalcar la importancia de Katherine Johnson en la ciencia a través de sus aportaciones más trascendentes. También aludir a la película referente a su vida, por si el alumno se ha quedado con las ganas de aprender más sobre ella.
- Al final del todo exponemos una conclusión general, acerca de los problemas a los que tuvo que enfrentarse Katherine por ser una mujer de color, con el fin de concienciar al alumno.

Como el desarrollo del problema lo vamos a realizar en dos sesiones alternas (una para cada parte), es posible que algunos apartados, como las aportaciones a la ciencia o la conclusión final, las tengamos que repetir en cada una de ellas.

5.2.2. Estructura del problema

El bloque temático sobre Katherine Johnson se ha estructurado en función de los siguientes epígrafes: Contexto histórico, Biografía, Problema contextualizado, Aportaciones a la ciencia, Observaciones del ejercicio, Otros ámbitos y Conclusión, descritos en el *apartado 4.2*. En particular vamos a especificar cada uno de los puntos clave que constituyen el problema *“Las derivadas, el camino hacia la Luna”.*

- Título: *“Las derivadas, el camino hacia la luna*”. Expresa en una sola frase de lo que trata el problema.

- Introducción del problema. Situamos a Katherine en su puesto de trabajo en la NASA y presentamos las diferentes situaciones que nos van a llevar al planteamiento de las actividades.
- Desarrollo del problema. El alumno debe responder a los ejercicios numéricos sobre optimización y el cálculo de rectas tangentes.
  - Como estamos trabajando dos contenidos distintos dentro de la misma unidad didáctica, el problema queda dividido en dos partes.
    - PARTE 1: Un ejercicio de optimización.
    - PARTE 2: Un ejercicio con varios apartados sobre rectas tangentes.
  - Este ejercicio en concreto no alberga un apartado de Conclusión/es durante su desarrollo, aun así, al finalizar el ejercicio los alumnos deben deducir algunas de ellas (*Aprendizaje por descubrimiento)*.

5.2.3. Competencias

Con la realización de este problema trabajamos las distintas competencias (*ver apartado 4.3) establecidas* en la LOMCE, de la siguiente manera:

- **CMCT.** En la realización de los ejercicios numéricos de optimización y cálculo de rectas tangentes; y en la adquisición de los conceptos y contenidos desarrollados durante el problema.
- **CSC.** Durante inicio del problema al plantear noticias de actualidad sobre las desigualdades de género; y al finalizar el problema, en primer lugar, cuando hablamos sobre las aportaciones que realiza Katherine a la ciencia; y, en segundo lugar, durante la conclusión, haciendo alusión a las barreras a las que ha tenido que enfrentarse como mujer de color.
- **CEC.** Con la presentación de la biografía y contexto histórico de Katherine. También con el uso de imágenes y fotos históricas.
- **CPAA:** A través del trabajo individual y organización personal del alumno durante la actividad.
- **CCL:** Con la presentación histórica y biográfica de Katherine. También a través del enunciado del problema.

- **CD:** Para la presentación se utiliza un proyector y un *PowerPoint*. Además, en la resolución de la parte correspondiente a las rectas tangentes, se utiliza el programa informático *GeoGebra*.
- **SIE:** El alumno interesado puede continuar trabajando e investigando sobre la vida de Katherine. Para ello se le recomienda, entre otras cosas, una película que pueda motivar lo a la vez que entretenerlo.

5.2.4. Atención a la diversidad

A continuación, vamos a determinar cuáles son las diferentes medidas de atención a la diversidad que podemos aplicar durante la realización del problema contextualizado (*ver apartado 4.4)*.

- Medidas a nivel de centro.
    - Es un problema aplicable a 1º de Bachillerato.
    - Se ha seleccionado la unidad didáctica llamada: Cálculo de derivadas y sus aplicaciones.
    - Este problema puede utilizarse también en 2º de Bachillerato, ya que los problemas de optimización y cálculo de rectas tangentes se vuelven a trabajar en este nivel. Por tanto, debemos modificar el problema aumentando su complejidad matemática.
    - Tanto el lenguaje literario, formal, oral y matemático utilizado, requiere de la precisión y madurez, adecuada a la edad de los alumnos.
- Medidas a nivel de curso.
    - Dentro del curso 1º de Bachillerato, lo ponemos en práctica para la modalidad de Ciencias y Tecnología. Cabe la posibilidad de aumentar la complejidad del problema.
    - También se puede utilizar en la modalidad de Ciencias Sociales, pero no podemos aumentar la complejidad del problema, ya que para este nivel es lo máximo que les podemos pedir.
    - En el caso de que no dispongamos del tiempo suficiente para realizar el problema completo, se ajustará el tiempo de las explicaciones históricas y biográficas, dando prioridad al problema numérico y desarrollo de los contenidos.

- Medidas a nivel de clase.
  - El problema lo realizan de manera individual.
  - Cada uno ocupa su sitio de trabajo correspondiente a la disposición de la clase ordinaria de matemáticas.
- Medidas a nivel individual.
  - Para los alumnos con menor capacidad tendremos en cuenta las adaptaciones curriculares definidas en el *apartado 4.4.* Por ejemplo: le dejaremos más tiempo para la realización del problema de optimización, es posible modificar la presentación del problema en la ficha que se le proporcione, podemos dividir y esquematizar el problema en partes para que le resulte más sencillo, podemos asignarle un profesor extra o un alumno que le apoye, *etc.*
  - Para los alumnos que, tras finalizar el problema, resulten más motivados e interesados en la vida de Katherine Johnson, les podemos pedir que realicen cualquier tipo de actividad que les permita seguir trabajando en el tema. Por ejemplo, que realicen alguna investigación adicional sobre dicha mujer o incluso que creen un problema contextualizado con ella como protagonista y que implique el uso de derivadas.

5.2.5. Evaluación

A continuación, vamos a definir los puntos clave a la hora de evaluar este problema, en función de lo explicado en el *apartado 4.5.*

En primer lugar, las tres dimensiones en las que vamos a realizar el seguimiento de la actividad dedicada a Katherine Johnson son:

- Seguimiento en vivo. Durante las dos sesiones alternas presenciales, en las cuales llevamos a cabo el desarrollo del proyecto.
- Examen. A través de un problema contextualizado distinto en el que la protagonista vuelva a aparecer.
- Las fichas y los apuntes del alumno que ha ido realizando durante las sesiones de problemas contextualizados.

Los aspectos que debemos tener en cuenta para calificar el problema y proceder a su evaluación son los siguientes:

- El comportamiento, la participación activa y el trabajo del alumno durante las dos sesiones que dura el problema.
- El trabajo autónomo en casa, en el caso de que no les dé tiempo a acabar la actividad en clase.
- El ejercicio contextualizado en el examen. Preguntamos a cerca de un problema contextualizado distinto en el que la protagonista sea Katherine, que tenga dos partes. Una primera obligatoria, que trate sobre optimización o el cálculo de rectas tangentes y una segunda optativa, sobre la vida de Katherine, que sirva para subir nota (*ver apartado 5.2.5.1).*
- La ficha del problema debidamente cumplimentada.
- Trabajo optativo o de ampliación, para aquellos alumnos motivados que deseen seguir trabajando en el tema.

Para que podamos evaluar el aprendizaje por descubrimiento en el alumno, éste debe rellenar la Tabla 1 de manera individual. Podemos ver un ejemplo de cómo sería en la Tabla 5. Por otro lado, para evaluar el problema y proceder a su calificación debemos utilizar la rúbrica que aparece en la Tabla 2. Finalmente, vamos a indicar las dimensiones temporales en las cuales llevamos a cabo la evaluación del problema.

- En tiempo real. Durante las dos sesiones que dura el problema tenemos en cuenta el comportamiento, el trabajo en clase (de manera individual o por equipos) y la participación activa del alumno.
- Evaluación mensual/trimestral. Durante los exámenes de la 3ª evaluación del curso con el problema contextualizado del examen. También con la evaluación de las fichas de apuntes de Katherine.
- Evaluación final. A través de la evaluación del portafolios, en el que irán incluidas las fichas sobre Katherine, y las notas de las exposiciones finales.

Problema	Lo que sabíamos	Lo que necesitamos aprender	Lo que hemos aprendido
Las derivadas, el camino hacia la Luna.	-Interpretación geométrica de las derivadas. -Previamente durante la unidad didáctica hemos aprendido a calcular derivadas (regla de la cadena). -Cónicas y lugares geométricos.	-Resolver problemas de optimización. -Derivación implícita. -Calcular la recta tangente a una función. -Derivar con soltura.	-Optimizar el área de un cilindro. -Calcular la recta tangente a una elipse.

Tabla 5: Ejemplo de cómo será la tabla cumplimentada por un alumno.

5.2.5.1. Problema ejemplo para el examen

Ejercicio: *Los ingenieros aeronáuticos de la NASA han encomendado a Katherine Johnson la importante labor de calcular cuál debe ser la superficie máxima de una de las escotillas del Apollo 11, ya que con los trajes espaciales los astronautas ocupan mucho espacio y tienen dificultad de salir a través de ella. Sabiendo que la escotilla tiene una parte inferior con forma rectangular y una superior con forma semicircular, como la que aparece en la Figura 2 y además su perímetro son 2 metros. Ayuda a Katherine a calcular las dimensiones que hacen que el área sea máxima.*

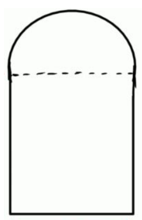


Figura 2: Forma de la escotilla que debemos optimizar.

Cuestiones de subir nota:

- *¿Por qué Katherine Johnson era conocida como "La calculadora humana"?*
- *Cita tres proyectos espaciales de importancia en los que haya participado.*

6. DISCUSIÓN

La puesta en práctica de este proyecto fue llevada a cabo en una clase de 1º de la ESO y otra de 1º de Bachillerato modalidad Científico/Tecnológico, durante mi etapa de prácticas. Los resultados obtenidos tras su ejecución muestran un cambio significativo en la actitud del alumno hacia la asignatura de matemáticas. Podemos diferenciar algunas ventajas e inconvenientes que pueden surgir a lo largo del desarrollo del proyecto en el aula.

Ventajas
● Es un proyecto muy flexible que permite adaptarse prácticamente a cualquier circunstancia y contratiempo que pueda surgir. ● Permite conseguir un mayor grado de atención por parte del alumnado. Hasta el alumno más problemático atiende. Esto se puede deber a que se ha utilizado una metodología didáctica distinta a la que los alumnos están acostumbrados ● Permite conseguir un mayor grado de participación por parte del alumnado, haciendo preguntas sobre los problemas y sobre la vida de las mujeres. ● Permite incrementar el interés por la vida y el contexto histórico de estas mujeres. Al utilizar la Historia de las Matemáticas de una manera atractiva para presentar el problema, podemos potenciar la curiosidad de los alumnos por los aspectos históricos que rodean a las matemáticas. ● Permite sensibilizar a los alumnos sobre el tema de igualdad de género. ● El resultado final es una matemática más atractiva para los alumnos, totalmente distinta a la que conocen.
Inconvenientes
● El tiempo puede ir en nuestra contra, ya que la explicación de la parte histórica y biográfica conlleva un tiempo que algunos cursos no disponen (como es el caso de Bachillerato). ● Para trabajar en el aula necesitamos disponer de recursos TIC (proyector, presentación de diapositivas, *etc.*), que cabe la posibilidad de que en algún momento dado fallen. ● El tema a tratar puede no resultar interesante para el alumno. ● Pueden surgir algunos problemas relacionado con el nivel de aprendizaje de la clase o las capacidades de un alumno en concreto.

Tabla 6: Ventajas e inconvenientes del proyecto de innovación.

Como bien hemos dicho anteriormente, una de las características principales del proyecto es su flexibilidad ante cualquier situación. Por ello los inconvenientes que aparecen en la Tabla 6 podemos solucionarlos de la siguiente manera:

- En el caso de no disponer del tiempo suficiente para llevar a cabo la sesión de problemas contextualizados, es posible fragmentar y acortar la sección dedicada a los aspectos históricos y biográficos, dándoles la información para que la trabajen por su cuenta. Tiene, en este caso, mayor relevancia el desarrollo de los contenidos.
- El uso de las fichas de problemas que se les entrega a los alumnos nos permite asegurar que la clase de problemas se lleve a cabo a pesar los contratiempos que puedan surgir en el uso de las TIC.
- Si el tema a tratar no resulta interesante para los alumnos, adaptamos el contenido de los problemas y la dinámica de las clases buscando su motivación.
- Todos los problemas que surjan relacionados con el nivel de aprendizaje o la capacidad del alumno podemos tratarlos poniendo en práctica las medidas de atención a la diversidad (*ver apartado 4.4).*

Por otro lado, nos gustaría hacer alusión al beneficio del aprendizaje por descubrimiento (*ver apartado 3.1*)*.* En primer lugar, es una metodología que permite superar las limitaciones del aprendizaje tradicional y mecánico, basado en la Clase Magistral en la que el alumno es un mero espectador. Por otro lado, permite estimular al alumno para que éste piense y actúe por sí mismo; planear y confirmar hipótesis; estimular el autoestima y seguridad en uno mismo; favorecer la retención del conocimiento y potenciar la búsqueda de soluciones creativas a los problemas matemáticos. Finalmente, cabe destacar la importancia que tiene esta metodología en la gestión y organización del aprendizaje en el alumno de manera autónoma, es decir en fomentar su capacidad de aprender a aprender.

No obstante, el aprendizaje por descubrimiento no está exento de inconvenientes. Es una metodología que su puesta en práctica exige mucho tiempo y un gran esfuerzo por parte del docente, ya que muchos alumnos no disponen de una motivación inicial. Además, están acostumbrados a otro tipo de metodología de enseñanza, aquella en la que el profesor les da todo hecho, y ellos simplemente memorizan fórmulas y procedimientos, sin abstraer las ideas principales.

Nuestro proyecto de innovación es una herramienta muy potente que nos permite cumplir con los objetivos establecidos al inicio del proyecto. Por un lado, permite a los alumnos aprender matemáticas, mientras que, por otro lado, son formados en los valores de igualdad de género.

Sin embargo, tenemos varias limitaciones a la hora de cumplir aquellos objetivos relacionados con la educación en género, ya que es habitual ver en nuestras escuelas como las cargas familiares y culturales en el alumno, minan el avance hacia una sociedad más igualitaria entre sexos. Por tanto, nosotros los docentes tenemos que tener en cuenta todos aquellos factores que rodean al alumno, para poder entender muchas veces su comportamiento frente a determinadas situaciones, en concreto en la lucha por la igualdad de género. Conociendo previamente el contexto y el entorno del alumno, podemos modificar la metodología y la forma de abordar dichos objetivos, con el fin de conseguir avances en el alumno en la lucha por la igualdad y que sea capaz de generar un criterio crítico propio frente a las distintas situaciones de desigualdad.

Finalmente intentaremos introducir en los problemas contextualizados, pequeñas situaciones cotidianas, consideradas hoy en día machistas a las que nuestras mujeres puedan verse involucradas. Este tipo de circunstancias nos va a permitir despertar las conciencias dormidas entre los estudiantes, haciéndoles ver que en una situación normalizada hay una desigualdad hacia la mujer. Esto nos facilitará orientar su motivación hacia la correcta consecución de los distintos objetivos feministas.

7. CONCLUSIÓN

Tras estudiar y analizar la evolución histórica del papel de la mujer, tanto en el campo de las matemáticas como en un contexto general, podemos concluir que su desarrollo en el transcurso del tiempo ha ido evolucionando hacia una mejora continua orientada al progreso y al cambio hasta lo que hoy conocemos como igualdad de género; quedando, lamentablemente, todavía mucho por hacer para que esta lucha absurda deje de tener sentido. A lo largo de la historia, las mujeres han sido apartadas de ámbitos como la educación, la política, la ciencia y la vida social, relegadas al cuidado del hogar y a la educación de los hijos, trabajo muy necesario pero muy mal valorado en la sociedad. A pesar del progreso conseguido, desafortunadamente la mujer ha sido siempre categorizada como el "*sexo débil*", menospreciada, olvidada y apartada de los grandes logros de la humanidad.

Sin embargo, y a pesar de todas los obstáculos y barreras sociales, políticas y económicas, la historia nos ha dejado a grandes mujeres que decidieron luchar, arriesgar sus vidas, su reputación en el mejor de los casos, y defender los derechos de la mujer en condición de ser humano, sin importar el género. Estas mujeres fueron y son el ejemplo de todos, en su batalla contra los dogmas sociales, tratando de desarrollar sus intereses y aportaciones aún sin ser valoradas y aún sin reconocerles mérito alguno. Este histórico soterramiento contra la mujer sigue siendo un hecho en nuestra sociedad, incluso en ciertos países el progreso sigue siendo nulo.

En el ámbito de la docencia y educación, tan solo basta con analizar el contenido de los libros de textos y manuales que utilizamos a diario, donde se sigue ocultando o camuflando los logros y éxitos que las mujeres aportaron a ciencia, incluso en ciertos casos siendo estos más relevantes que los conseguidos por los hombres.

Por todo ello hemos intentado rescatar a un grupo de mujeres matemáticas que han sido, la mayoría de ellas, silenciadas, discriminadas y cosificadas, simplemente por su género a pesar de sus méritos. Tras haber investigado acerca de la vida de estas matemáticas, es posible destacar algunas características comunes que comparten:

- La mayoría de ellas nació en una familia acomodada, con cierto poder adquisitivo, así como con acceso, recursos e interés orientados a la educación. En definitiva, su posición social les permitió ser instruidas y adecuadamente aleccionadas para un futuro desarrollo profesional.
- Muchas de ellas fueron excluidas de las universidades y de la educación en general.
- Discriminación en el ámbito científico; no estaba bien visto que la mujer se interesara por el estudio de la ciencia, siendo ésta, considerada como "*cosa*" de hombres.
- Muchas de las obras y aportaciones de estas mujeres se han perdido o se han quedado repartidas en obras de otros autores. Este hecho ha complicado y complica la labor de investigación y conocimiento sobre el alcance de sus contribuciones a las matemáticas.
- A algunas de ellas se las reconoce más por otros factores que por sus contribuciones a la ciencia. Por ejemplo: a Sofía Kovalevskaya se la conoce por ser alumna de Karl Weierstrass, a Teano por ser la esposa de Pitágoras, a Ada Lovelace por ser la hija del escritor Lord Byron, a Agnesi por "*La Bruja de Agnesi"*, etc.

La colección de estos problemas contextualizados, junto con la vida e historia de las mujeres matemáticas, son una herramienta dirigida a los profesores y profesoras de los Centros de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional, con el fin de contar y transmitir al alumnado todo aquello que no está escrito en los libros, con el objetivo de acabar con los estereotipos que siguen condenando a la mujer a la sombra del hombre. Es por lo que nuestro papel como docentes es primordial a la hora de concienciar y sensibilizar al alumno del valor de la igualdad de género. Resulta de vital importancia que los aspectos relacionados con la vida y las aportaciones de estas mujeres sean incluidas dentro del currículum, con el fin de combatir la aún presente falocracia, y ofrecer a los alumnos modelos femeninos en los que encontrar la inspiración, la referencia y el modelo a seguir en su desarrollo académico, personal y profesional.

Este proyecto no es más que la punta del iceberg de un problema con una dimensión mucho mayor,

Tuve la suerte de poder llevar a cabo el proyecto de innovación durante los meses de prácticas del máster, y los resultados conseguidos, en esta línea, fueron más que satisfactorios. Por este motivo, pretendemos animar y motivar a todos los docentes a su puesta en práctica en el aula de matemáticas, ya que, contribuyendo en la difusión de estos valores, y promoviendo la visibilidad de estas mujeres, finalmente lograremos sacar a la luz sus contribuciones y aportaciones a la ciencia, analizar su influencia y desarrollo en la historia de las matemáticas y, por supuesto, conseguir que la lucha por igualdad de género deje de ser una batalla y pase a ser historia.

8. REFERENCIAS

Álvarez, P. 19 de enero de 2015. Ellas tienen más estudios y ellos, más trabajo. *El País.* Recuperado de: https://politica.elpais.com/politica/2015/01/19/actualidad/1421666442_720236.html

Barria, P.V., Celedón, M. (2016). *La extraordinaria Emmy Noether*. Chile: Universidad de Chile.

Bovaria, F. (productor) y Amenábar, A. (director). (2009). *Ágora* [cinta cinematográfica]. España: Telecinco Cinema.

Burner, J. (1995). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid: Morata.

Cantó, P. 9 de marzo de 2018. Tu respuesta a este acertijo dice mucho de tus prejuicios. *El País.* Recuperado de: https://verne.elpais.com/verne/2018/03/09/articulo/1520611883_345855.html

Consejo de Europa, *Mainstreaming de género. Marco conceptual, metodología y presentación de "buenas prácticas". Informe final de las actividades del Grupo de especialistas en mainstreaming (EG-S-MS)*, (versión español e inglés), Instituto de la Mujer, Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, Serie documentos, número 28, Madrid, 1999, p. 26.

Dieterle, W. (director). (1936). *The white angel* [cinta cinematográfica]. Estados Unidos: Warner Bros.

Federación de Enseñanza de CCOO e Instituto de la Mujer. (2011). *Otras miradas. Aportaciones de las mujeres a las matemáticas.* Madrid. Recuperado de: http://intercambia.educalab.es/?p=3839

Garii, B. y Silverman, F. (2009) *Beyond the Classroom Wall: Helping Teachers Recognize Mathematics Outsides School.* Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 12(3). 333-354.

Glick, P. y Fiske, S. T. (1996). *The Ambivalent Sexism Inventory: Differentiating Hostile and Benevolent Sexism*. Journal of Personality and Social Psychology, 70, 491-512.

Gigliotti, A. (productora), Melfi, T. (director). (2017). *Figuras Ocultas* [cinta cinematográfica]. Estados Unidos: 20th Century Fox.

Grossman, N, Ostrowsky, I. y Schwarzman, T. (producción). Tyldum, M. (director). (2014). *The imitation game* [cinta cinematográfica]. Reino Unido: Black Bear Pictures y Bristol Automotive.

Fcinco. (2016). *El examen más violento, racista y machista de la historia.* El Mundo. Recuperado de: http://www.elmundo.es/f5/2016/06/03/5751b9d7ca4741e2398b45ba.html

Figueiras, L. (1998), *El juego de Ada: matemáticas en las matemáticas.* Granada. España: Proyecto Sur.

Gobierno de La Rioja. (2016). *El Gobierno de La Rioja en Internet*. Atención a la diversidad. http://www.larioja.org/edu-aten-diversidad/es/atencion-diversidad

Horizon 2020. (2016). *Hypatia Project. European Union.* Recuperado de: http://www.expecteverything.eu/hypatia/

Howson, G., Keitel, C., y Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

ICMAT. (26 de diciembre de 2017). *Mi Científica Favorita.* Recuperado de: https://www.icmat.es/outreach/mi-cientifica-favorita

Kennedy, J.F. (1963). *Discurso de Graduación en American University*. John F. Kennedy Presidential Library and Museum. Boston (MA). Recuperado de: https://www.jfklibrary.org/JFK/Historic-Speeches/Multilingual-American-University-Commencement-Address/Multilingual-American-University-Commencement-Address-in--Spanish-Latin-American.asp.

Laserna, D.B. (2005). *Emmy Noether. Una matemática ideal.* Madrid. España: S.L. Nivola.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, núm. 295, de 10 de diciembre de 2013, pp. 97858 a 97921. http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Matemática Educativa-Cinvestav. (1999). *Los contextos en los problemas.* Recuperado de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~santos/atat/gen_contexto.html

Monaghan, J. (2007). *Linking School Mathematics to Out-of-school Mathematical Activities: Student Interpretation of Task*, Understandings and Goals. International Electronic Journal of Mathematics Education. 2(2). 50-71.

Oteo, A.E. (2001-2013). *¡Exprésate sin sexismo!* Instituto Nacional de las Mujeres. México D.F. Recuperado de: http://puntogenero.inmujeres.gob.mx/madig/sexismo/index.html

Molina, A. 4 de marzo de 2018. Mujeres en la universidad: un 60% de tituladas y solo el 14% de las rectoras. *Cadena Ser, Sociedad.* Recuperado de: http://cadenaser.com/ser/2018/03/02/sociedad/1520005123_473823.html

Parra, H. (2013). *Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente.* Revista Omnia: Universidad del Zulia. Venezuela. vol. 19. pp.74-85. Recuperado de:http://www.redalyc.org/pdf/737/73730059007.pdf

Proyecto IUVENALIS. (2008). *Análisis y transferencia de buenas prácticas* (Acción 3). Recuperado de: http://www.carm.es/ctra/cendoc/haddock/14932.pdf

Real Decreto 19/2015, de 12 de junio, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria. Consejería de Educación, Cultura y Turismo de la Comunidad Autónoma de La Rioja. La Rioja. España. BOR 19 de junio de 2015. http://ias1.larioja.org/boletin/Bor_Boletin_visor_Servlet?referencia=2386883-1-PDF-493946

Real Decreto 21/2015, de 26 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato. Consejería de Educación, Cultura y Turismo de la Comunidad Autónoma de La Rioja. La Rioja. España. BOR 3 de julio de 2015. http://ias1.larioja.org/boletin/Bor_Boletin_visor_Servlet?referencia=2419707-1-PDF-494584

Sánchez, L. (2013). *Sophie Germain. Las matemáticas como pasión.* Madrid. España: S.L. Nivola.

Shakhmaliyeva, A. (director). (1985). *Sofía Kovalevskaya* [cinta cinematográfica]. Unión Soviética: Gosteleradio.

Tenbrink, T. (1981). *Evaluación: guía rápida para profesores.* EE.UU. (MI). Columbia: Narcea

Universidad Internacional de Valencia. (2015). *¿Qué se entiende por aprendizaje por descubrimiento?* Recuperado de: https://www.universidadviu.es/que-se-entiende-por-aprendizaje-por-descubrimiento/

Wilcox, H. (productor y director). (1951). *The lady with the lamp* [cinta cinematográfica]. Reino Unido: Herbert Wilcox Production.

9. ANEXOS

9.1. Anexo I: Problemas y otras notas machistas

Siguiendo el hilo de la introducción, una de las razones por las que hemos decidido realizar este proyecto de innovación es la *Contextualización de problemas*. El hecho de que los problemas y ejercicios se contextualicen es primordial debido a que la matemática que se imparte en las escuelas generalmente se muestra como una disciplina de esencia abstracta, en la que los contenidos se adquieren de una forma mecánica.

Queda claro que es importante la adecuada contextualización de las matemáticas, pero ¿cuándo un problema está bien contextualizado? Generalmente cuando no tiene contenido ofensivo que pueda aludir a la sensibilidad de aquel que lo esté leyendo. Y hablo de clasicismo, micromachismos, homofobia, e incluso racismo (por ejemplo, el mítico problema de las *Mil y una noches* que transcurre en un mercado de oriente). Y sí, problemas de este estilo podemos encontrar en la actualidad en multitud de libros de texto, hojas de ejercicios e Internet.

Resulta preocupante que la mayoría alumnos, al trabajar con este tipo de problemas, acaben por obviar su contenido sexista, y esto es debido en parte a los convencionalismos sociales. A continuación, os mostramos una lista de problemas matemáticos que pueden esconder algún micromachismo en su enunciado.

- Puestos de trabajo y empleo del protagonista del problema.
  - **Problema 1:** *Para formar la tripulación de un avión se eligen 3 comandantes y 4 azafatas entre un grupo de 11 personas, 5 de las cuales son comandantes y el resto, azafatas. ¿Cuántas tripulaciones distintas se pueden formar?*
  - **Problema 2:** *Un jardinero poda el lunes 2/7 de sus rosales; el martes, 3/5 del resto, y el miércoles finaliza el trabajo podando los 20 que faltaban. ¿Cuántos rosales tiene en total en el jardín?*

- **Problema 3:** *Un camionero, un obrero, un futbolista, etc.*
- **Problema 4:** *Una enfermera, una cuidadora, una secretaria, etc.*

Y es que generalmente los problemas en los que se ven involucrados puestos de trabajo están muy condicionados al sexo. Dan a entender que existen unos trabajos exclusivamente para hombres y otros exclusivos para mujeres. Qué casualidad de que el adjetivo de azafata del problema 1 esté puesto en femenino, ¿no hay azafatos hombres?

- **Problemas en los que es *siempre la madre la que…***
  - **Problema 4:** *Una madre manda a su hijo al río para que le traiga exactamente 3 litros de agua, Para ello le da un bote de 4 litros y otro de 9 litros. ¿Cómo puede medir el niño con exactitud los 3 litros sirviéndose únicamente de los dos botes?*
  - **Problema 5:** *Una madre manda a su hijo a comprar dos docenas de huevos, 15 panes y 5 paquetes económicos de mortadela con un billete de 20 dólares. Si los huevos cuestan 0.15 $ cada uno y el niño compra panes de 0.30 $; recibiendo 4.4 $. ¿Cuál fue el valor de cada paquete de mortadela?*
  - **Problema 6:** *Mamá va a la feria a comprar fruta para darnos de postre después de almuerzo ¿Cuánto dinero gastó mamá en la compra de los 2 kilos de fruta?*
  - **Problema 7:** *La abuela ha hecho dos kilos y cuarto de mermelada y con ella ha llenado seis tarros iguales. ¿Qué fracción de kilo contiene cada tarro?*

Y es que es siempre es una mujer la que manda a comprar al hijo, la que realiza las tareas del hogar, la que se encarga de cocinar, y la que gasta y va a la compra. En estos casos me pregunto: ¿dónde está papá?

- **Problemas en los que es siempre una mujer la que compra**.
  - **Problema 8:** *Andrea ha gastado ⅔ partes de su dinero en un vestido y en un pañuelo. ¿Qué fracción de dinero le queda? Si a Andrea le quedan 20€, ¿cuánto dinero tenía al principio?*
  - **Problema 9:** *En un supermercado el 70% de las compras las realizan las mujeres; de las compras realizadas por estas el 80% supera los*

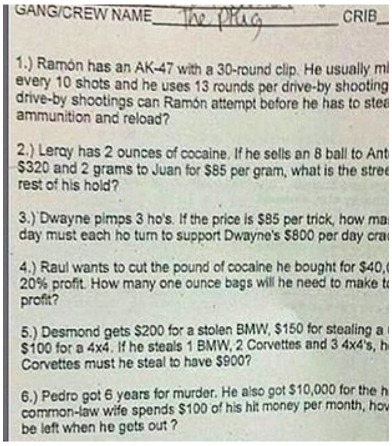
12€, mientras que las compras realizadas por los hombres solo el 30% supera esa cantidad, etc.

En este tipo de problemas queda remarcado el estereotipo de mujer como principal figura consumidora, siendo siempre la que más compras realiza y la que más gasta. Como si las mujeres fueran las únicas que compran.

- **Problemas en los que estudian más chicos que chicas.**
  - **Problema 10:** *En una universidad existen tres facultades: A, B y C. En A hay matriculadas 50 chicas y 150 chicos; en B 200 chicas y 300 chicos; y en C, 150 chicas y 150 chicos, etc.*

  Este tipo de problemas muestra siempre a la mujer en una situación de inferioridad frente al hombre, dentro del ámbito educativo. Pero en la actualidad no es así, las cifras dicen que hay más mujeres en las aulas, que hombres.

- **Problemas de otros ámbitos**
  - **Problema 11:** El problema chisme (problema de teléfono) es un problema de la difusión de información, donde cada uno de los nodos de una red de comunicación tienen una información única que debe transmitirse a todos los demás nodos mediante comunicaciones bidireccionales (llamadas telefónicas) entre los pares de nodos. Tras una llamada entre los dos nodos dados, intercambian toda la información que conocen en ese momento. Suela empezar: "*Un grupo de mujeres intentan telefonearse…”*
- **Problemas de un examen real de una profesora de matemáticas estadounidense (ver Figura 3).**
  - **Problema 12:** *Dwayne es el chulo de tres prostitutas. Si el precio de un servicio es de 85 dólares, ¿Cuántos servicios al día debe hacer cada una para que Dwayne pueda mantener su hábito de fumar 800 dólares de crack al día?*
  - **Problema 13:** *Tyrone ha preñado a 4 chicas de su banda. Si en su banda hay 20 chicas, ¿cuál es el porcentaje de mujeres a las que Tyrone ha dejado preñadas?*



GANG/CREW NAME The Plug CRIB

1.) Ramón has an AK-47 with a 30-round clip. He usually mi
every 10 shots and he uses 13 rounds per drive-by shooting
drive-by shootings can Ramón attempt before he has to stea
ammunition and reload?

2.) Leroy has 2 ounces of cocaine. If he sells an 8 ball to Ant
$320 and 2 grams to Juan for $85 per gram, what is the stree
rest of his hold?

3.) Dwayne pimps 3 ho's. If the price is $85 per trick, how ma
day must each ho turn to support Dwayne's $800 per day cra

4.) Raul wants to cut the pound of cocaine he bought for $40,
20% profit. How many one ounce bags will he need to make t
profit?

5.) Desmond gets $200 for a stolen BMW, $150 for stealing a
$100 for a 4x4. If he steals 1 BMW, 2 Corvettes and 3 4x4's, h
Corvettes must he steal to have $900?

6.) Pedro got 6 years for murder. He also got $10,000 for the h
common-law wife spends $100 of his hit money per month, hov
be left when he gets out ?

Figura 3: El peculiar examen de matemáticas de una profesora de EE.UU. (El Mundo, 2016)

- **Chistes matemáticos**, que pueden resultar ocurrentes, pero en el fondo no tienen ninguna gracia.
  - **Chiste 1:** *La mujer es el único elemento matemático que cumple con las cuatro reglas básicas: suma gastos, resta alegrías, multiplica problemas y divide las opiniones.*
  - **Chiste 2:** "*Bueno vamos a continuar con la Teoría de Conjuntos. Hoy veremos el concepto de conjuntos disjuntos. A∩B∩C=Ø"*

    A= Lo que las mujeres piensan.

    B= Lo que las mujeres hacen.

    C= Lo que las mujeres dicen.
- **Chiste 3:**
  1. *Para conseguir una mujer necesitas tiempo y dinero, por tanto:*

     $$① \ \boxed{MUJER = TIEMPO \times DINERO}$$

  2. *El "tiempo es oro", por lo tanto, el tiempo es dinero:*

     $$② \ \boxed{TIEMPO = DINERO}$$

  3. *Reemplazamos 2 en 1:*

     $$MUJER = DINERO \times DINERO$$
     $$③ \ \boxed{MUJER = (DINERO)^2}$$

  4. *El dinero es "la raíz" de todos los problemas.*

     $$④ \ \boxed{DINERO = \sqrt{PROBLEMAS}}$$

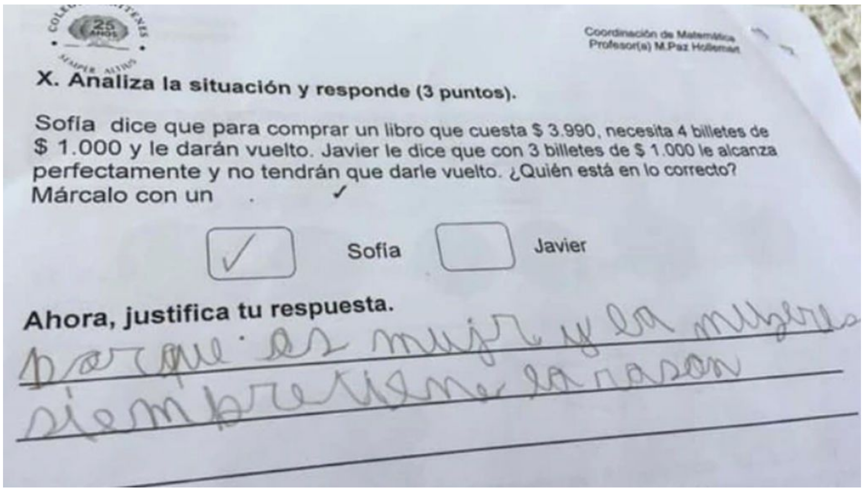
5. *Reemplazamos 4 en 3.*

$$MUJER = \left(\sqrt{PROBLEMAS}\right)^2$$

(5) $\boxed{MUJER = PROBLEMAS}$

- **Respuestas a problemas.**

La respuesta al problema de matemáticas que aparece en la Figura 4, realizada por un niño de primaria, es verídica.



Coordinación de Matemática
Profesor(a) M.Paz Holleman

X. Analiza la situación y responde (3 puntos).

Sofía dice que para comprar un libro que cuesta $ 3.990, necesita 4 billetes de $ 1.000 y le darán vuelto. Javier le dice que con 3 billetes de $ 1.000 le alcanza perfectamente y no tendrán que darle vuelto. ¿Quién está en lo correcto? Márcalo con un ✓.

[✓] Sofía [ ] Javier

Ahora, justifica tu respuesta.

porque es mujer y la mujeres siempre tiene la rason

Figura 4: Respuesta machista de un alumno de primaria a un ejercicio matemático

En primer lugar, puede parecer gracioso, pero la triste realidad que esconde este ejercicio va más allá de una simple ocurrencia infantil. ¿Quién le ha enseñado eso al niño? ¿Dónde lo habrá escuchado? Es importante trabajar en el aula la adecuada contextualización de problemas para evitar conductas como la de la Figura 4 y evitar que evolucione a peor en un futuro.

9.2. Anexo II: Mujeres matemáticas

9.2.1. Teano

“Mucho más que una esposa”

Contexto histórico

El marco histórico donde nos situamos para conocer la vida de Teano es el de la Antigua Grecia, en concreto entre los siglos VIII a.C. y V a.C. Este periodo es conocido como la Época Arcaica, una etapa de expansión cultural influenciada, en parte, por la mitología y las leyendas.

Durante esta época se construye una matemática original y brillante, generalmente práctica, influenciada por algunos elementos de civilizaciones babilónicas y egipcias.

Pitágoras fundó la escuela que llevaba su nombre hacia el siglo VI a.C. rompiendo con la tradición social de la época, permitiendo que las mujeres formen parte de la Escuela Pitagórica. Se daba mucha importancia a la educación tanto en hombres como en mujeres, a parte de las artes útiles como: la Filosofía, las Matemáticas, la Astronomía, la Música y la Medicina, se ocupaban del lenguaje y el rigor del razonamiento. El lema principal de la Escuela afirmaba que *"todo es número"*, ya que se creía que en la naturaleza todo podía explicarse mediante los números. Consideraban importante que una mujer fuera inteligente y culta.

Biografía

Nacida en Crotona (Grecia) en el siglo VI a.C. Hija de un mecenas que decide enviarla como alumna a la Escuela Pitagórica. Pronto destacó por sus dotes en matemáticas y astronomía, como alumna más aventajada, llegando a convertirse en profesora de la escuela.

Fue esposa de Pitágoras, con el cual tuvo cinco hijos. Tras la caída de la Comunidad Pitagórica, debido al poder que ésta tenía; la destrucción de la Escuela, a manos del pueblo de Crotona; y la muerte de Pitágoras; Teano consiguió ponerse al frente de la escuela como directora junto a sus hijos, y continuar así con la difusión del conocimiento a través de Egipto y Grecia.

Se le atribuyen distintos hitos en matemáticas, entre ellos: el tratado sobre la Piedad, tratados sobre poliedros regulares y sobre la teoría de las proporciones, y en particular, cabe destacar las aportaciones sobre el número áureo.

Problema contextualizado

Problema 1: "El templo de Teano"

PARTE 1

Un día Teano, la esposa de Pitágoras, observó que el templo donde impartía tratados sobre Geometría y Astronomía tenía una forma geométrica especial, como la que aparece en la Figura 5. Con ayuda de una cuerda midió las paredes del templo y observó que sus 6 lados tenían exactamente la misma longitud, 8 metros.

1. *¿De qué figura geométrica se trata?*

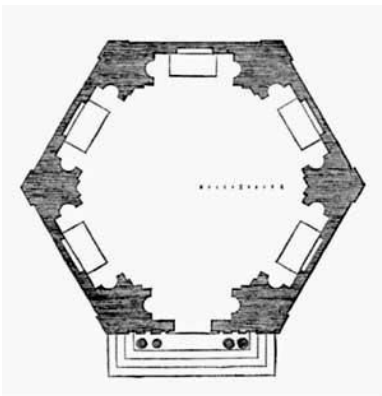


Figura 5: Plano del templo donde impartía clases Teano.

Con ayuda de una tiza y partiendo del punto medio de la sala, trazó distintas líneas rectas desde el centro hasta las esquinas, realizando el proceso conocido como triangulación.

2. *Realiza el proceso de triangulación en tu cuaderno.*

Tras finalizar observó estudió los siguientes resultados:

3. *¿En cuántas partes (triángulos) quedó dividido el templo?*
4. *¿Cuánto miden los ángulos interiores de cada triángulo?*
5. *¿Qué tipo de triángulo se trata?*

Conclusión: *Si dividimos un hexágono regular en triángulos trazando líneas desde el centro hasta cada uno de los vértices, obtenemos ……… triángulos ……..…………*

Teano era una apasionada por la arquitectura griega. Por tanto, tras obtener los resultados, quería documentar las medidas más significativas del templo. Para ello volvió a coger la cuerda y midió la longitud de los trazos que había realizado con la tiza.

6. *¿Cuánto miden estos trazos?*

Para su sorpresa observó que medían exactamente lo mismo que los lados del templo.

7. *Sabiendo ésto, ¿podrías ayudar a Teano para calcular las medidas más significativas del centro y poder así documentarlas para la posteridad?*
    - *Apotema del templo.*
    - *Perímetro del templo.*
    - *Área del templo.*

PARTE 2

Teano cansada de que su marido llegara a casa con la ropa sucia debido a que el suelo del templo estaba sin embaldosar, le dio un ultimátum y le dijo que buscara una solución, ya que no le iba a lavar más la ropa. Por tanto, Pitágoras decidió embaldosar el templo con figuras geométricas regulares, pero no sabe cuáles puede usar.

1. *¿Sabrías decirle a Pitágoras con qué figuras regulares se puede cubrir todo el suelo sin que quede ningún hueco?*
2. *Si al final se decide por utilizar baldosas en forma de hexágonos regulares cuya área es de 44 cm cuadrados. Sabiendo el área del suelo del templo, ¿cuántas baldosas tiene que utilizar?*

3. *Teano está buscando un diseño nuevo para el mosaico de la pared del templo, ya está cansada de tanta figura geométrica regular. Realiza una teselación para Teano siguiendo las indicaciones:*
   - *Elige una de las siguientes figuras regulares: Triángulo equilátero, cuadrado o hexágono regular.*
   - *Recorta una parte de la pieza y añádelo a otra parte de la figura. Ahora tienes tu nueva pieza del mosaico.*
   - *Haz copias de la pieza creada y pégalas formando un mosaico. La Figura 6 muestra un ejemplo.*

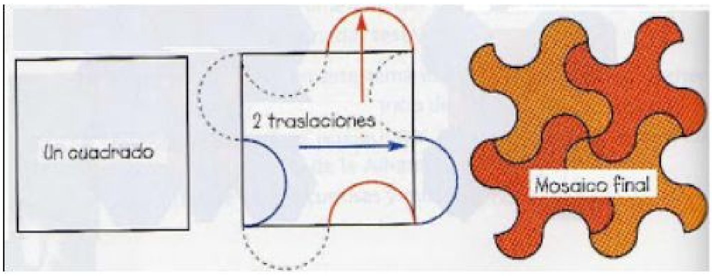


Figura 6: Ejemplo de una teselación del plano partiendo de un cuadrado.

Problema 2: "La edad de Teano"

Cuenta la leyenda que uno de los alumnos de Pitágoras se acercó al maestro y le preguntó por la edad de Teano, su esposa. Éste como era 30 años mayor que ella, se mosqueó un poco por tal indiscreción, y le respondió con el siguiente problema.

> *"Teano es perfecta y su edad es un número perfecto[9]".*

El alumno, poco satisfecho por la respuesta, le dice: ¿No podrías darme alguna pista más? A lo que Pitágoras le responde:

> *"La edad de Teano, además de ser un número perfecto, es el número de sus extremidades multiplicado por el número de sus admiradores que es un número primo".*

¿Sabrías calcular la edad de Teano?

[9] Número perfecto: es un número natural que es igual a la suma de sus divisores propios. Por ejemplo, el 6=1+2+3

Aportaciones a la ciencia

Teano es considerada como la primera mujer matemática de la historia de la cual se tiene constancia. Además de participar junto a su marido en las investigaciones de la Escuela, destaca por su sabiduría y su pasión hacia unas matemáticas ordenadas.

Caben señalar sus trabajos en geometría, en especial sus descubrimientos sobre la proporción áurea, ya que fue la primera en plantear la existencia del número de oro. Un número con infinitas cifras decimales presente en la armonía y la proporción del universo.

También fue una apasionada de la astronomía y la concepción del universo. Defendía que éste tenía forma de esfera cerrada en la que los astros orbitaban de forma perfecta alrededor de la Tierra.

En conclusión, fue una gran defensora de la doctrina Pitagórica. Llegó a dirigir la escuela fundada por su marido, favoreciendo la expansión del conocimiento pitagórico por todo el imperio griego.

Observación del problema

El problema 1: "*El templo de Teano*", está pensado para realizarlo en una clase de 1º de la ESO. Es un problema cuyos contenidos se basan en la unidad didáctica: *Mediciones: Longitudes y Áreas.* El problema lo podemos realizar durante las sesiones de ejercicios previas al examen, con el fin de repasar conceptos de área, longitudes, ángulos y figuras geométricas planas. La segunda parte del problema está relacionada con la teselación del plano mediante figuras geométricas planas regulares. Con esta actividad se pretende estimular la creatividad del alumno, buscando algo diferente, con el fin de motivar y llamar la atención del alumno.

El problema 2: "*La edad de Teano*", también conocido como *Problema Theaniano,* se resuelve planteando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la edad de Teano y el número de seguidores. Es un problema contextualizado ya existente, planteado como ampliación a la vida de Teano con el que buscamos motivar al alumnado. Se puede realizar en cualquier curso como curiosidad.

Otros ámbitos

Teano es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de la Geometría. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de las siguientes unidades didácticas de los distintos cursos de enseñanza. Generalmente serán unidades didácticas del bloque de Geometría.

- 1º de la ESO: Números naturales, Proporcionalidad, Teorema de Pitágoras, Elementos del plano, Polígonos, Áreas de figuras planas, Circunferencia y círculo.
- 2º de la ESO: Triángulos y Semejanza, Teorema de Pitágoras, Elementos del espacio, y Áreas y Volúmenes.
- 3º de la ESO: Geometría plana y áreas, Movimientos en el plano, Elementos del espacio y Áreas y Volúmenes de los cuerpos geométricos.
- 4º de la ESO: Trigonometría, Vectores en el plano y Ecuaciones de la recta.
- 1º de Bachillerato: Geometría analítica, Trigonometría y Lugares geométricos.
- 2º de Bachillerato: Rectas y planos, Vectores, Ángulos distancias y áreas.

También podemos plantear actividades de distinta índole, que involucren Geometría, como, por ejemplo:

- Dibujar números en la recta real utilizando regla y compás.
- Calcular perímetros, áreas y volúmenes de distintas figuras geométricas, como, por ejemplo: edificios, recipientes y otros objetos cotidianos.
- Obtener la proporción divina usando proporciones en objetos de la naturaleza (por ejemplo, la altura de una persona con la distancia de su ombligo al suelo, tarjetas de crédito, concha de un caracol, *etc.*).
- Ecuaciones diofánticas.

Conclusión

Es curioso, ya que, como miembro de la escuela Pitagórica, pensaba que todo en la naturaleza podía explicarse a través de los números de contar (números naturales), y a su vez fue la primera persona en plantearse la existencia del número áureo, es decir, un número con infinitas cifras decimales.

Al ser esposa de Pitágoras, su nombre, muchas veces se ha visto eclipsado por el de su marido. Es una matemática que brilla por sí sola y no necesita ser presentada como esposa de nadie. Teano fue una mujer muy importante, no solo dentro de la Escuela Pitagórica, sino para las matemáticas en general.

Podemos encontrar más información acerca de su vida en el libro "*El juego de Ada: matemáticas en las matemáticas*" (Figueiras, 1998).

9.2.2. *Hipatia*

"La luz de la ciencia"

Contexto histórico

Alejandría fue una ciudad fundada por Alejandro Magno en el año 331 a.C., situada en la zona norte de Egipto a orillas del río Nilo. Debido a la situación geográfica, fue una de las urbes más prósperas en cuanto al nivel cultural e intelectual del periodo helenístico, convirtiéndose en el principal punto de intercambio comercial del norte de África.

En la ciudad de Alejandría se encuentran dos de las construcciones de la historia antigua más importantes: el Faro, considerado una de las siete maravillas del mundo antiguo; y el Templo de las Musas, que albergó la famosa Biblioteca de Alejandría, la más grande de la época y símbolo de la institución científica más importante del periodo helenístico.

En el año 30 a.C. los romanos conquistan Alejandría, donde dará inicio la expansión de la cultura grecorromana. Comienzan a surgir la expansión de religiones monoteístas, como el cristianismo, provocando numerosos conflictos y persecuciones. El Imperio Romano comenzará a decaer tras quedar dividido entre Oriente y Occidente.

Biografía

Nace en Alejandría entre el 335 y 370. Hija del famoso matemático y astrónomo Teón, director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Éste se ocupó de la educación de su hija, compartiendo sus conocimientos y parte de su trabajo con ella. Tras instruirse en la Biblioteca viajó a Roma y Atenas para continuar con su formación. Tras su regreso a Alejandría impartió clases de matemáticas, filosofía (corriente neoplatónica), astronomía y lógica a personalidades importantes y aristócratas de la ciudad.

Hipatia era mujer, pagana, científica, matemática y soltera, que se desenvolvía con soltura en cualquier espacio público, y se codeaba con las figuras y familias más poderosas de la ciudad. Es por ello que era una mujer influyente en la sociedad de aquella época.

En el año 415 fue asesinada por un grupo de fanáticos cristianos, tras ser acusada de brujería, por influenciar al prefecto[10] Orestes; y herejía, al no querer convertirse al cristianismo.

Problema contextualizado

<u>Problema 1: "El numerograma de Hipatia"</u>

Un día Hipatia se encontraba trabajando en su escuela. Tras organizar unos antiguos papiros egipcios, que su padre Teón le había proporcionado de la famosa Biblioteca de Alejandría, observó un extraño cuadrado que jamás había visto anteriormente (ver Figura 7). El cuadrado está dividido en distinta filas y columnas, formando cuadrados de un tamaño menor. En la parte superior del papiro aparecen distintos enigmas y acertijos matemáticos que Hipatia debe resolver para poder completar el extraño cuadrado y así poder comprender el misterio que ésta extraña figura esconde. ¿Serás capaz de ayudar a Hipatia a completar el cuadrado siguiendo las indicaciones dadas?

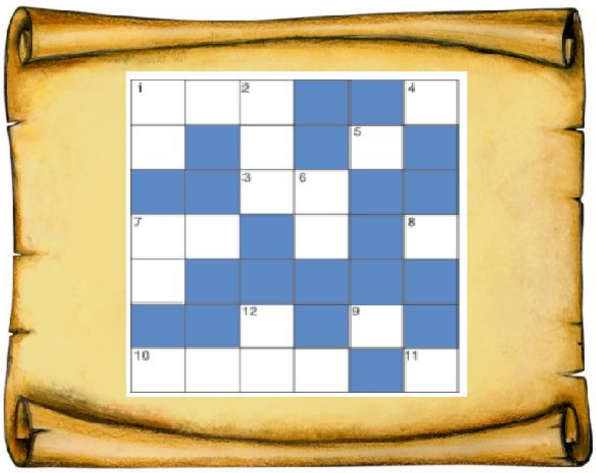


Figura 7: Numerograma de Hipatia incompleto.

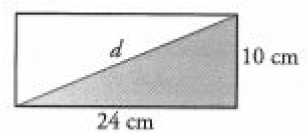
[10] Prefecto: Persona de autoridad del Imperio Romano, cuyas atribuciones abarcaban el ámbito militar y civil de la ciudad.

Nota: *Solo se admiten respuestas numéricas.*

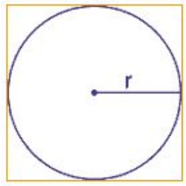
Horizontales

1. *¿Cuánto vale aproximadamente el área de una rueda de carro cuyo radio es 1 cm?*

3. *Calcula la diagonal de la siguiente parcela rectangular.*



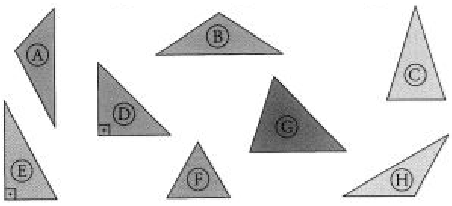
7. *Si tenemos un pentágono regular y dibujamos todas sus diagonales ¿En cuántas partes queda dividido el interior de la figura?*



8. *La figura de la derecha muestra un pozo visto desde arriba. Si el borde cuadrado exterior del pozo tiene de área 36 cm cuadrados. ¿Cuál es el radio del borde interior circular del pozo?*

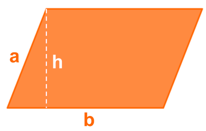
10. *Calcula la longitud del borde circular del pozo.*

11. *En la siguiente imagen podemos ver las caras laterales de distintas pirámides. ¿Cuántas de ellas son triángulos acutángulos?*

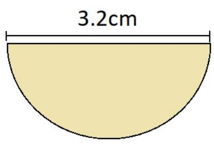


Verticales

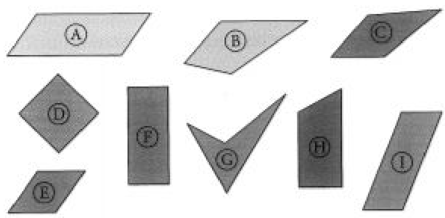
1. *Calcula el área de la siguiente parcela egipcia sabiendo que a=7 cm, b=9 cm y h=4 cm.*



2. *Calcula el área del siguiente plato de balanza.*



4. *En la siguiente imagen podemos ver las bases de distintas pirámides cuadrangulares. ¿Cuántas de estas bases son paralelogramos equiláteros?*



5. *De las bases anteriores, ¿cuántos son trapezoides?*

6. *Calcula* $\sqrt{38.44}$

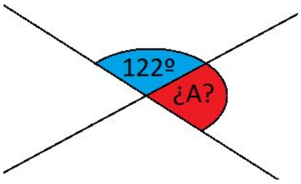
7. *Una de las caras lateral de la cúspide de un obelisco es un triángulo rectángulo uno de los ángulos mide 75º, ¿cuánto mide el ángulo que falta?*

9.*De las siguientes frases ¿cuántas son verdaderas?*

a. *El punto donde se cortan las mediatrices se llama ortocentro.*
b. *Las rectas notables de un triángulo equilátero coinciden.*
c. *Las alturas de un triángulo siempre van por dentro de la figura.*
d. *Dos circunferencias tangentes se cortan en 2 puntos.*

e. *La bisectriz de un ángulo llano forma dos ángulos rectos.*
f. *La suma de los ángulos de un trapecio es 360º.V*

12. *¿Cuánto vale el ángulo A del siguiente reloj de sol?*



Problema 2: "El astrolabio de Hipatia"

Hipatia es considerada como una de las primeras mujeres científicas de la historia. Una de sus aportaciones más importantes y originales a la ciencia, en concreto a la astronomía medieval, fue la participación en la creación y sofisticación del astrolabio. Este invento fue utilizado por astrónomos durante 1200 años hasta la invención del telescopio en el s. XVII.

El astrolabio es un antiguo instrumento que sirve para observar la situación y movimientos de los astros. También permite medir la altura de las estrellas sobre el horizonte.

Tras añadir varias mejoras a su invento, Hipatia ha decidido documentar el proceso. Para ello tiene que escribir el desarrollo y las instrucciones de montaje de esta nueva revolución científica en un papiro, y así poder ser almacenado en la famosa Biblioteca de Alejandría. Tras observar el instrumento detenidamente se dio cuenta de que su estructura estaba formada por distintas figuras geométricas planas, como podemos ver en la Figura 8.

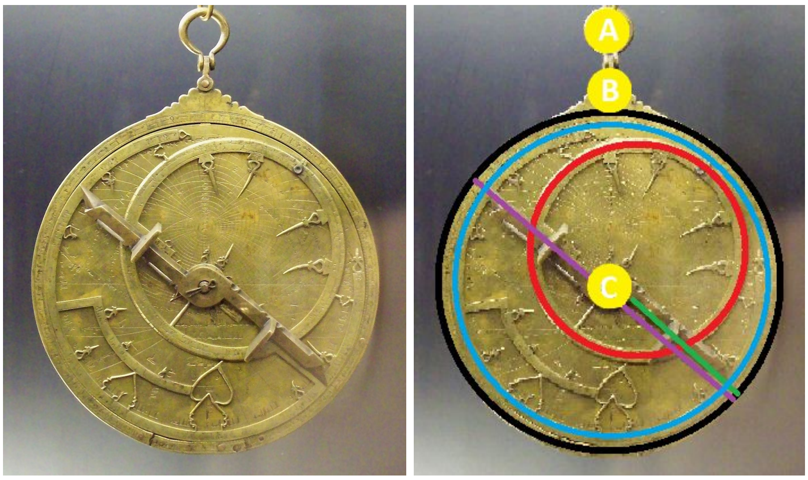


Figura 8: Astrolabio de Hipatia.

Necesitamos que ayudes a Hipatia a documentar la información necesaria sobre la estructura del astrolabio, respondiendo a las siguientes preguntas:

1. *¿Qué figuras geométricas observas en el dibujo?*
2. *¿Cuál es la posición relativa entre las tres circunferencias?*
3. *¿Cuál es la posición relativa de los puntos respecto a las circunferencias? ¿Qué representan las agujas del astrolabio?*
4. *Si prolongamos el segmento violeta hasta el infinito y formamos una recta, ¿cuál será su posición relativa respecto a las circunferencias?*

Aportaciones a la ciencia

La mayoría de las obras de Hipatia se perdieron tras el trágico incendio que destruyó la Biblioteca de Alejandría. Entre sus aportaciones matemáticas destaca la colaboración junto a su padre Teón, en la creación y corrección de la obra: *Sistemas matemáticos de Ptolomeo.* También participó en la mejora de *Los Elementos de Euclides.* Además, comentó y aportó nuevos conocimientos a distintas obras de importante índole como: *Las Cónicas de Apolonio*, una de las obras matemáticas sobre geometría más importante de la antigüedad; y *La Aritmética de Diofanto*[11]*,* obra basada en problemas sobre la resolución de ecuaciones con números enteros*.*

Por otro lado, se le corresponde la autoría y el diseño de algunos inventos como el hidrómetro, el astrolabio y el hidroscopio.

Observación del problema

El <u>problema 1: "El numerograma de Hipatia"</u>, es una actividad dirigida para alumnos de 1º de la ESO. El problema se basa en los contenidos de las unidades didácticas: Teorema de Pitágoras, Elementos del plano, Áreas de figuras planas, Circunferencia y círculo. El problema lo podemos realizar durante las sesiones de repaso previas al examen, con el fin de repasar los conceptos de área, raíces cuadradas, ángulos y figuras geométricas planas.

El <u>problema 2: "El astrolabio de Hipatia",</u> es una actividad dirigida para alumno de 1º de la ESO. Este problema está basado en el contenido de la unidad didáctica Elementos del plano. El ejercicio lo podemos realizar durante

[11] Diofanto de Alejandría (200-284): matemático griego considerado como "*el padre del álgebra*".

una sesión ordinaria de clase, tras explicar el contenido basado en las posiciones relativas entre puntos, rectas y circunferencias.

Otros ámbitos

Hipatia es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de distintas disciplinas científicas como son las matemáticas, la filosofía y la astronomía. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de las siguientes unidades didácticas de los distintos cursos. Generalmente son unidades didácticas del bloque de Geometría.

- 1º de la ESO: Proporcionalidad, Teorema de Pitágoras, Elementos del plano, Polígonos, Circunferencia y círculo, y Áreas de figuras planas
- 2º de la ESO: Teorema de Tales y Pitágoras, Triángulos y Semejanza, Elementos del espacio y Áreas y Volúmenes.
- 3º de la ESO: Geometría plana y áreas, Movimientos en el plano, Elementos del espacio y Áreas y Volúmenes de los cuerpos geométricos.
- 4º de la ESO: Trigonometría, Vectores en el plano y Ecuaciones de la recta.
- 1º de Bachillerato: Geometría analítica, Trigonometría y Lugares geométricos.
- 2º de Bachillerato: Rectas y planos, Vectores, Ángulos, distancias y áreas.

También podemos incluir a Hipatia como protagonista de varias actividades distintas, como, por ejemplo:

- Construcciones geométricas. Por ejemplo: construir una elipse con dos chinchetas una cuerda y un lápiz, obtener cónicas a partir de la intersección de un plano y un cono, *etc.*
- Realización de ecuaciones diofánticas sencillas. Como curiosidad y motivación a alumnos aventajados, se puede proponer la ecuación diofántica que aparece en el epitafio de la tumba de Diofanto.

"En esta tumba reposa Diofanto. ¡Ah, qué gran maravilla! La tumba cuenta científicamente la medida de su vida. Dios le

concedió ser un muchacho durante la sexta parte de su vida, y añadiendo una doceava parte a ésta, revistió su mejilla de pelusa. Encendió la luz del connubio pasada una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le dio un hijo. ¡Ay! ¡Desdichado hijo tardío! Después de consolar su pena mediante el estudio de los números durante cuatro años, Diofanto terminó su vida."

Conclusión

La imagen de Hipatia rompe con el canon de mujer como figura inferior a la del hombre. Fue una apasionada de las ciencias y del método científico. Su escepticismo ante cualquier idea que no se pudiera razonar de forma lógica, la llevó a defender sus ideas hasta la muerte. Se enfrentó al patriarcado de aquella época *mirándole a los ojos directamente,* y gracias a sus conocimientos científicos consiguió alcanzar un papel fundamental, no solo en la sociedad de Alejandría, sino también en la Historia de las Matemáticas.

Hay una película reciente que trata sobre la vida de Hipatia, del director español Alejandro Amenábar (2009), llamada *Ágora*. No es muy rigurosa, pero puede resultar un recurso muy útil para complementar el problema.

9.2.3. María Gaetana Agnesi.

"La hechicera de los números"

Contexto histórico

Durante el siglo XVIII, denominado *El siglo de las luces*, surge en Europa la Ilustración, un movimiento cultural e intelectual, basado en el racionalismo, la búsqueda de la felicidad, la creencia en la bondad del hombre, el optimismo y el laicismo.

Este movimiento no se expandió de forma homogénea por toda Europa. En concreto, en los diversos estados, lo que hoy se considera Italia, hubo un resurgimiento en cuanto al papel de la mujer en la ciencia. Pronto se permitió el ingreso de las mujeres en las universidades y academias, pero éstas no tenían en mismo reconocimiento que los hombres. Destacan mujeres científicas italianas como: Elena Cornaro Piscopia, Diamante Medaglia, María Ángela Ardinghelli y Laura María Catarina Bassi, todas ellas matemáticas.

Biografía

María G. Agnesi nació en Milán en 1718 en la cuna de una familia acomodada. Hija de un comerciante de la seda, fue la mayor de 21 hermanos. Debido a su estatus social tuvo una notable formación académica.

A muy temprana edad ya dominaba 7 lenguas, por lo que era conocida como "*el Oráculo de los siete idiomas*". Su maravilloso intelecto la llevaron a ser el centro de las reuniones que organizaba su padre, juntando a sabios y eruditos locales.

María era tan tímida y sentía tal devoción por la religión, que en más de una ocasión quiso dejar todo atrás y hacerse monja, pero la presión a la que le sometía su padre para el estudio y desarrollo de las matemáticas, logró frenar esta decisión. Tras la muerte de su padre, a sus 34 años decide abandonar las matemáticas. Muere a la edad de 81 años en el año 1799.

Problema contextualizado

Problema 1: "La Bruja" de Agnesi

María Gaetana Agnesi se encuentra en su despacho escribiendo su principal obra matemática "Instituciones analíticas". Está un poco frustrada porque no puede acabar el último capítulo dedicado al Análisis, ya que la información con la que está trabajando es muy tediosa y abundante. En concreto solo le queda estudiar y analizar una función racional de grado dos, que anteriormente fue estudiada ni más ni menos que por los famosos matemáticos Pierre de Fermat y Luigi Guido Grandi. Y como ella es una mujer muy inteligente, no se achanta ante las adversidades y tiene pensado acabar su gran obra. La expresión analítica de la función cúbica con la que está trabajando es la siguiente:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Utiliza las herramientas de análisis matemático vistas en clase, para ayudar a Agnesi con la documentación y el estudio de esta extraña función, y así quitarle un poco de trabajo para que pueda acabar su gran obra.

3ºESO

Vemos que es una función racional de grado dos. Vamos a ver cómo esta función representa una curva a través de una animación (ver Figura 9).

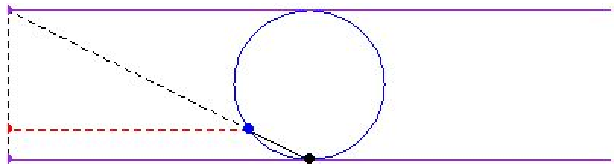


Figura 9: Animación que muestra cómo se forma la curva de Agnesi.

Supongamos que tomamos la expresión analítica para $a = 2$: $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$

Cuya representación aparece en la Figura 10.

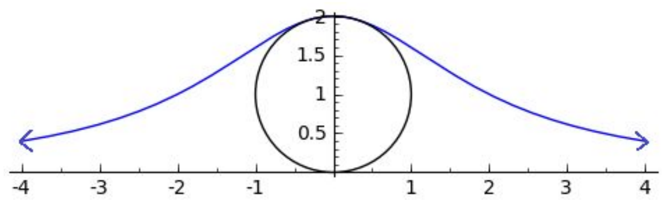


Figura 10: Representación gráfica de la curva de Agnesi para a=2.

Dada la gráfica, indicar los siguientes aspectos analíticos:

1. *Dominio de la función.*
2. *Recorrido de la función.*
3. *¿Es continua?*
4. *Monotonía: Crecimiento y decrecimiento.*
5. *Máximos y mínimos relativos.*
6. *Máximos y mínimos absolutos.*
7. *Simetría.*
8. *Periodicidad.*

Conclusión: *¿Qué indica el parámetro a de la función?*

1º y 2º BACHILLERATO

Supongamos que tomamos la expresión analítica para $a = 2 : f(x) = \frac{8}{x^2+4}$

Vamos a realizar un estudio completo de la función.

1. *Dominio.*
2. *Primera y segunda derivada.*
3. *Continuidad: Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*
4. *Monotonía (crecimiento y decrecimiento): signo de la primera derivada.*
5. *Extremos relativos (máximos y mínimos): signo de la segunda derivada.*
6. *Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.*
7. *Cortes con los ejes.*
8. *Simetría.*
9. *Periodicidad.*
10. *Tabla de valores.*
11. *Representación.*
12. *Recorrido.*

- *¿Que representa la función?*

Problema 2: La curva de Agnesi como lugar geométrico

Agnesi está hoy de celebración. Ha conseguido acabar su obra cumbre "Instituciones analíticas" de una vez por todas. Para celebrarlo ha hecho una fiesta matemática en la que todos sus invitados deben acudir con papel y un lápiz. En la fiesta se va a sortear un jamón. El ganador será aquella persona que consiga obtener la ecuación de su mayor descubrimiento, la curva de Agnesi, en el menor tiempo posible. ¿Serás tú el afortunado? Los pasos a seguir para obtener la ecuación de la curva de Agnesi son los siguientes:

1. *Traza una circunferencia con centro en el punto* $(0,1)$ *y radio* $r=1$.
2. *Traza una recta* s *horizontal al eje de abscisas que pase por el punto* $(0,2)$.
3. *A continuación, traza una recta r que pase por el origen de coordenadas y que corte a la circunferencia en el punto A y a la recta s en el punto B.*
4. *Si la curva de Agnesi son los puntos* $P(x,y)$ *generados por donde se cruzan las rectas BP y AP perpendicularmente.*
5. *Calcula la ecuación del lugar geométrico.*

Aportaciones a la ciencia

Agnesi se considera la primera mujer de la historia en conseguir una cátedra universitaria, en la Universidad de Boloña. Desde bien joven, a los 9 años de edad, reivindicaba en sus discursos el derecho de las mujeres para acceder a la educación.

Publicó varios trabajos de carácter matemático importante a lo largo de su vida, pero su obra cumbre fue *"Instituciones Analíticas",* basada en el cálculo diferencial y traducida en varios idiomas. Ésta es la obra matemática más antigua que se conserva, escrita por una mujer.

Cabe destacar la metodología didáctica con la que exponía sus conocimientos y resolvía los problemas.

Observación del problema

El problema 1: La "Bruja" de Agnesi, es un ejercicio que podemos plantear a partir de 2º de la ESO. Es un ejemplo claro del estudio de una función, utilizando las herramientas para el análisis matemático de cada curso. En mi opinión, es un ejercicio obligatorio que todos los alumnos de bachillerato deben realizar en las unidades didácticas del bloque de Análisis.

El problema 2: La curva de Agnesi como lugar geométrico, es un ejercicio con un nivel añadido, ya que se trata de una sencilla demostración matemática para obtener la curva de Agnesi a partir de su definición como lugar geométrico. Está pensado para alumnos de 1º de Bachillerato durante el desarrollo de la unidad didáctica de Lugares Geométricos. Podemos utilizarlo como ejercicio de ampliación o de subir nota, para aquellos alumnos interesados o más avanzados en el tema. Para la resolución de este problema es posible utilizar como recurso didáctico GeoGebra.

Otros ámbitos

Agnesi es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de las siguientes unidades didácticas de los distintos cursos. Generalmente son unidades didácticas del bloque de Análisis.

- 2º de la ESO: Gráficas y funciones.
- 3º de la ESO: Gráficas y Funciones.
- 4º de la ESO: Funciones.
- 1º de Bachillerato: Continuidad, Límites, Funciones, Derivadas y sus aplicaciones y Representación gráfica.
- 2º de Bachillerato: Límite de funciones, Continuidad de funciones, Cálculo de derivadas y sus aplicaciones, Representación gráfica e Integrales.

También podemos incluir a María G. Agnesi como protagonista de varias actividades, como, por ejemplo:

- Problemas de Optimización.
- Generar la curva de Agnesi para un parámetro *a* distinto de 2.
- Buscar información y realizar algún trabajo sobre curvas famosas (Cardiode, Astroide, *etc.)*

Conclusión

Una anécdota curiosa sobre la curva la *"Bruja de Agnesi"* es el origen de su nombre. Y no es que María Agnesi practicase la brujería ni nada de eso. Todo se debe a un error de traducción. el matemático Grandi la llamó en un principio curva *versoria*, del latín *vertere*, que significa virar o girar; en italiano se definió como *versiera* que es un término naval que identifica el cabo o cuerda que hace girar la vela (debido a la forma que tiene la función). María Gaetana Agnesi escribió en su obra *"Instituciones analíticas*": *la versiera*, añadiendo el artículo femenino delante. Al traducir su gran obra al inglés por John Colson (el cual no tenía mucha idea de italiano), llamó a la curva *witch* ("bruja"), debido a que confundió *versiera* con *avversiera* (que en italiano significa "*diablesa*", "*demonia*". Quedando denotada para la eternidad, la curva con este desafortunado nombre.

En ocasiones, se iba a la cama dejando algún problema sin resolver. Se dice que por la noche se levantaba sonámbula lo resolvía y se volvía a la cama, despertándose con el problema resuelto.

Agnesi fue una matemática reconocida en su época, destaca por su sencillez en las matemáticas. Aunque tuvo la mala suerte de que su reputación fue distorsionada por un fallo de traducción, quedando normalizado en los libros de historia para la eternidad.

Condicionada por su padre, hasta tal punto de verse forzada a estudiar, nos dejó grandes descubrimientos en el campo de las matemáticas, y una de las obras analíticas más originales jamás escrita.

9.2.4. Sophie Germain

“Valentía notable, genio extraordinario y talento superior”

Contexto histórico

En las últimas décadas del s. XVIII o *Siglo de las luces,* y principios del siglo XIX, Francia vivió una época de cambio y reformas sociales, marcadas por dos hitos históricos principales: la Revolución Francesa (1789-1799) y el posterior auge al poder de Napoleón.

París era considerado centro científico y cultural de Europa, sobre todo para el desarrollo las matemáticas. La mujer continúa teniendo un papel secundario en la ciencia, ya que no se le permite el acceso a las escuelas y universidades. Era tal la discriminación hacia el género femenino, que los libros científicos se adaptaban a las mujeres con un lenguaje más sencillo y novelesco.

Biografía

Sophie Germain nació en París en el año 1776. Fue hija de un adinerado burgués cultivado que participó de forma activa en la Revolución Francesa. Debido a la guerra y con la edad de 13 años, decidió buscar refugio en las matemáticas. Estudiaba con tal fervor, que su familia muchas veces temía que ésta enfermara.

Cuando cumplió 19 años intentó acceder a la Escuela Politécnica de París, pero no permitían el acceso a mujeres. Consiguió impresionar por sus trabajos, a grandes matemáticos de la época como Gauss y Lagrange.

Aunque dedicó toda su vida al estudio de las matemáticas, cabe destacar uno de sus grandes logros es en el campo de la física, en concreto sobre la elasticidad de las superficies. Murió en 1831 debido a un cáncer de mama.

Problema contextualizado

<u>Problema: “Construye el mundo con los números”</u>

Sophie Germain pasaba muchas horas encerrada en la biblioteca de su padre para evitar las revueltas que se producían en la calle debido a La Revolución Francesa. Un día lluvioso se encontraba aburrida en aquel lugar paseando por los pasillos. Como su padre no volvía hasta dentro de un buen rato, decidió saltarse las normas e ir a una sala, a la cual su padre le tenía prohibido el acceso. En esta sección había libros exclusivamente para hombres. El hecho de que existieran libros científicos para hombres y para mujeres le cabreaba, ya que ella se sentía igual o incluso más lista que un hombre. Le llamó la atención un viejo libro de matemáticas que se titulaba: “Construye el mundo con los números”. Sin dudarlo un momento, comenzó a leerlo.

1. *El capítulo uno del libro hablaba de una familia de números que servía para contar, ordenar y codificar. ¿De qué conjunto de números se trata?* *Los **<u>números Naturales</u>** …. ={...............................}*

   La respuesta es fácil, pensó Sophie. Al final de cada capítulo aparecen un conjunto de cuestiones que ella debe resolver. ¡Échale una mano!

   Dadas las siguientes ecuaciones, Sophie debe resolverlas utilizando exclusivamente números naturales.

   a) $x + 10 = 20$
   b) $x + 5 = 8$
   c) $x + 7 = 7$
   d) $x + 11 = 5$

   ¿Ha sido posible resolver las ecuaciones usando solo números naturales? ¿Cuál no se ha podido resolver con números naturales?

2. *El segundo capítulo, hablaba de unos números que permitían medir la temperatura. ¿Qué conjunto numérico debe utilizar Sophie para numerar todas las plantas de la biblioteca?* *Los **<u>números Enteros</u>** …= {.......................................}.*

Sophie rápidamente se dio cuenta de que con éste nuevo conjunto era posible solucionar las ecuaciones del tipo $a = x + b$*, ya que con el conjunto de los números enteros se puede restar siempre.*

¿Serías capaz de resolver las siguientes ecuaciones utilizando números enteros?

a) $x + 20 = 27$

b) $x - 7 = 4$

c) $x + 3 = 0$

d) $x + 14 = 0$

¿Cuáles de las anteriores preguntas no se han podido resolver usando números naturales?

Ahora ya todo empieza a cobrar sentido, dijo Sophie satisfecha. Inmersa en aquel libro, continuó pasando páginas y descubriendo la importancia de los números naturales y enteros en la vida real.

3. *En la primera página del tercer capítulo del libro, no hablaban de ningún nuevo conjunto. Simplemente había que resolver las siguientes ecuaciones. Con lo aprendido hasta ahora Sophie se dispuso a solucionarlas:*

a) $3x = 15$

b) $-6x = 18$

c) $4x = 21$

d) $11x = -341$

¿Ha podido resolver Sophie todas ellas utilizando exclusivamente números enteros?

Sophie ha llegado a la conclusión de que con los números enteros no siempre se puede dividir. Para que las ecuaciones del tipo $ax = b$*, tengan siempre solución tenemos que utilizar un nuevo conjunto numérico que contenga los dos anteriores y además nos permita siempre dividir. ¿De qué conjunto se trata?*

"¡Ya lo tengo!", dijo Sophie. El conjunto que estamos buscando son los ***<u>números Racionales</u>*** ……

¿Serías capaz de resolver ahora las siguientes ecuaciones utilizando números racionales?

a) $-6x = 100$

b) $3x = 30$

c) $4x = 25$

d) $3x = 81$

¿Cuáles de las anteriores preguntas no se hubieran podido resolver con los números enteros Z?

Conclusión:

Los números Racionales (Q) son aquellos que se pueden escribir en forma de fracción cuyo numerador y denominador es un número entero.

$$q \in Q \Leftrightarrow q = a/b \mid a, b \in Z$$

Tras realizar la división las siguientes fracciones ¿Qué observas?

a) 36/9

b) 1/4

c) 87/66

d) 4/11

Tras obtener los resultados Sophie se aventuró a realizar una clasificación de los números racionales.

- *Número entero: ocurre cuando el numerador es…………………… del denominador.*
- *Decimal exacto: tiene un número…………….. de cifras decimales. Ocurre cuando el denominador de la fracción es múltiplo de ……………………….*
- *Periódico puro: tiene un número ……………. de cifras decimales que se repiten, a esto se le denomina periodo. Ocurre cuando el denominador de la fracción es múltiplo de ………………………*
- *Periódico mixto: tiene un número finito de cifras decimales que no se repiten, a esto se le denomina ……………..; y un número ……………. de cifras decimales que se repiten, a esto se le denomina periodo. Ocurre cuando el denominador de la fracción es múltiplo de ………………………*

4. *“Un momento”, pensó Sophie. ¿Y los números con infinitas cifras decimales no periódicas? La respuesta estaba en el siguiente capítulo. Este conjunto se denomina* ***<u>números Irracionales</u>*** ***(…)***
    - *¿Podrías dar un ejemplo a Sophie de algún número irracional famoso?*
    - *¿En qué ocasiones cuando estabas estudiando te has encontrado estos números tan especiales?*
    - *Muchas raíces también son números irracionales. Y se pueden representar en la recta Real. Con ayuda de regla y compás representa gráficamente los radicales de los 10 primeros números naturales. ¿Cuáles de ellos son números racionales?*

Sophie, tras acabar el cuarto capítulo, se sintió un poco mareada debido a tanto número. Al regresar su padre le ha contado todo lo que ha aprendido acerca de los números. Éste asombrado, le animó a que continuara leyendo, ya que, en el quinto y último capítulo, se iba a llevar una gran sorpresa.

5. *Sin dudarlo un instante, Sophie abrió el libro en el capítulo quinto y continuó leyendo. Existe un conjunto mayor que engloba a todos los demás, este es el conjunto de los números* ***<u>Reales</u>*** ***(….).***

Durante el capítulo Sophie debe resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado, que es lo mismo que calcular el punto de corte con el eje de las X. ¡Échale una mano!

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $x^2 - 6x + 11 = 0$

- *¿Qué observas? ¿A qué es debido? ¿Qué determina el número de soluciones reales de una ecuación de segundo grado?*

Conclusión:

La parte $D = b^2 - 4ac$ *se denomina …………………… de la ecuación de segundo grado, y cumple que si*

- $D..0$ *la ecuación tiene dos soluciones, dos puntos de corte con el eje X.*
- $D..0$ *la ecuación tiene una solución doble, un punto de corte con el eje X.*

- $D..0$ *la ecuación no tiene solución real, ningún punto de corte con el eje X.*

¿Te animas, sin salir de Q, a resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado?

a) $4x^2 - 16 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 2 = 0$

d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

¿Cuáles de ellas no tienen solución en Q? ¿Entonces, a qué conjunto pertenecen dichas soluciones?

Conclusión:

El conjunto de los números Reales está formado por los números …………………..y los……………….. Con estos siempre podemos sumar, restar, dividir, multiplicar para conseguir un número real. Los números reales pueden representarse gráficamente en la …………….

Sophie está entusiasmada, ahora ve cómo todo cobra sentido. Pero aún hay algo que incompleto que le incomoda. ¿Qué pasa cuando el discriminante de la ecuación de segundo grado es negativo?

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	| |	$\mathbb{R}$
3					
-6/2					
$\sqrt[3]{-64}$					
π					
3/2					
$\sqrt{5}$					
….					

Tabla 7: Ejercicio de conjuntos numéricos de Sophie Germain.

Ya he comprendido cómo se estructuran los números en las matemáticas, dice Sophie. ¿Y tú los entiendes? Para ver si has comprendido todo lo *explicado te dejo que completes la Tabla 7, para ello debes marcar una X en la casilla correspondiente al número de la derecha. ¡Mucha suerte!*

Aportaciones a la ciencia

Sophie hizo grandes aportaciones a la Teoría de Números y a la Teoría de la Elasticidad. En 1808 comunicó a Gauss su más brillante descubrimiento, generalizándose más tarde en un teorema que lleva su nombre, el Teorema de Germain[12]. Este teorema fue fundamental para demostrar el último Teorema de Fermat.

Fue la primera mujer, no esposa de académico, que asistió a las sesiones de la Academia Francesa de las Ciencias.

Observación del problema

El problema: "Construye el mundo con los números", está dirigido a alumnos de 4º de la ESO de matemática académicas o aplicadas. Puede servirnos como introducción de las primeras unidades didácticas del curso relacionadas con los conjuntos numéricos. Con este ejercicio pretendemos, en primer lugar, realizar un repaso de conceptos de cursos anteriores (1º, 2º y 3º de la ESO: números naturales, números enteros y números racionales); y, en segundo lugar, introducir nuevos contenidos (representación de números irracionales y números reales). También puede servirnos como punto de partida para la unidad didáctica de 1º de Bachillerato de Números Complejos.

Otros ámbitos

Sophie Germain fue una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas y la física. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de las siguientes unidades didácticas de los distintos cursos.

- 1º de la ESO: Números naturales, Divisibilidad, Números enteros, Fracciones y Números racionales.
- 2º de la ESO: Divisibilidad, Números enteros, Fracciones y Números Racionales.
- 3º de la ESO: Fracciones y números racionales, Sucesiones.

[12] Teorema de Germain: si x, y, z son enteros tales que x^5+y^5+z^5=0, entonces al menos uno de los números x, y, z, debe ser divisible por 5.

- 4º de la ESO: Fracciones y números racionales, Números reales.
- 1º de Bachillerato: Números reales y Números Complejos.

También podemos incluir a Sophie Germain como protagonista de varias actividades relacionadas con matemática recreativa y la teoría de números, como, por ejemplo:

- Calcular los números Primos de Germain[13] menores que 100.
- Enseñarles la Conjetura de Collatz[14], y que prueben para varios números.
- Comparar el tamaño de los infinitos en 1º de Bachillerato. Por ejemplo, demostrar que el conjunto de los números naturales tiene el mismo tamaño que el que el de los números pares positivos.
- Matemagia.

Conclusión

Era tal la pasión que dedicaba Sophie al estudio de las matemáticas (actividad reservada para los hombres), que sus padres, en varios intentos para que desistiera de su estudio, la dejaban sin luz, sin calefacción y hasta sin ropa. Aun así, no consiguieron pararla, ya que continuaba con sus estudios a escondidas.

Otra de las dificultades que han marcado la historia de esta matemática, fue cuando intentó acceder a la Universidad Politécnica de París, rechazada inminentemente por ser mujer. Sin embargo, se las arregló para conseguir apuntes y realizar un trabajo, el cual presentó al mismísimo Lagrange bajo el seudónimo de "*Sr. Le Blanc*"*.* Éste quedó tan impresionado que decidió conocer personalmente al autor del trabajo, quedando revelada la verdadera identidad de Sophie.

Su vida y desarrollo científico ha estado marcado por el aislamiento de la comunidad científica y el escaso reconocimiento de su trabajo. Es un ejemplo

---

[13] Número Primo de Germain: es un número primo que al multiplicarlo por 2 y sumarle 1 obtenemos de nuevo otro número primo. Por ejemplo, el 2 es un número primo de Germain porque 2·2+1=5 que también es primo.

[14] Conjetura de Collatz: Si aplicamos la siguiente operación a un número entero:

- Si es número par se divide entre 2.
- Si es número impar se multiplica por 3 y se suma 1.

Llegamos siempre al ciclo cerrado {1,2,4}.

de superación y esfuerzo, luchando en todo momento por cumplir sus objetivos, superando las barreras y los obstáculos que la sociedad de aquella época le impuso por ser mujer.

Existen varios libros biográficos sobre su vida, entre ellas “*Sophie Germain. Las matemáticas como pasión”* (Sánchez, 2013).

9.2.5. Ada Lovelace

"La madre de la informática"

Contexto histórico

El principio del siglo XIX en Inglaterra, se considera la primera etapa de la época victoriana. Se caracteriza por ser un periodo marcado por la Revolución Industrial y el Liberalismo. Durante estos años se consiguen grandes avances en los derechos humanos como abolir la esclavitud y regular el trabajo infantil. Debido al crecimiento económico y a la creación de numerosos puestos de trabajo, la clase media comienza a ser cada vez más dominante.

El papel de la mujer en la ciencia era muy cuestionado. Las mujeres con menos recursos no tenían acceso a la educación, por lo que entraban a trabajar en las fábricas e industrias. Mientras que las mujeres con más recursos recibían una educación doméstica, a manos de institutrices. El acceso de la mujer a la universidad estaba prohibido.

Biografía

Augusta Ada Byron nació en Londres (Inglaterra) en el año 1815. Hija del fugaz romance entre el poeta Lord Byron, al que nunca conoció, y la baronesa Anna Isabella Byron. Su madre desde bien pequeña, la inculcó en el estudio de las matemáticas y la astronomía, con la idea de que se alejara del mundo de las letras y la poesía.

En 1833 gracias a su talento matemático conoció al matemático inglés Charles Babbage, con el cual trabajará y realizará sus aportaciones a la ciencia más importantes, sobre las máquinas analíticas.

A los 19 años se casó con el varón King, que más tarde fue nombrado conde de Lovelace. A partir de entonces Augusta pasará a ser conocida como Ada Lovelace.

Debido a sus conocimientos en el campo de la probabilidad, comenzó a investigar las carreras de caballos junto a Babbage, con la intención de realizar apuestas y así conseguir el dinero que necesitaban para financiar sus investigaciones. Esto les llevó a la ruina.

Murió en Londres en el año 1852, a la edad de 36 años por causa de un cáncer de útero. Curiosamente la misma edad a la que muere su padre y a la que morirá su hija. A pesar de no conocer a su padre biológico, su última voluntad fue ser enterrada junto a los restos mortales de éste.

Problema contextualizado

<u>Problema 1: Bingo de Tarjetas Perforadas</u>

Ada se encuentra en su laboratorio de informática reparando y mejorando la máquina analítica, que es una especie de calculadora (esta máquina se convertirá en lo que hoy en día conocemos por ordenadores).

La máquina analítica funciona de la siguiente manera. En primer lugar, se insertan unas tarjetas perforadas, de las cuales, posteriormente, la máquina recibe instrucciones y se ejecuta de una manera u otra.

Pero, ¡un momento! Parece que algo no va bien en el laboratorio, el punzón que agujerea las tarjetas se ha averiado, y la máquina ha empezado a producir operaciones matemáticas sin control. Ada está desesperada y necesita nuestra ayuda. Para solucionarlo nos ha dejado unas tarjetas sin perforar de repuesto, las cuales contienen distintos números como las que vemos en la Figura 11. A la vez que Ada nos dicte las operaciones que vayan apareciendo en la máquina, debemos hacer un agujero manualmente en la casilla correspondiente al resultado de dicha operación matemática.

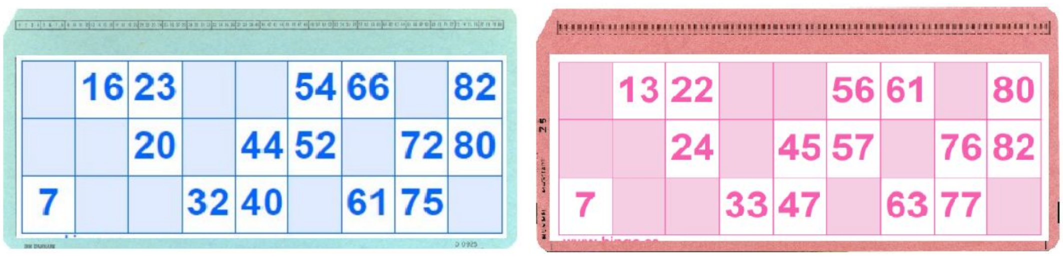


Figura 11: Ejemplos de tarjetas sin perforar para la máquina analítica.

La persona que consiga agujerear todos los números de su tarjeta y grite ¡ALGORITMO!, habrá sido el afortunado ganador y el poseedor de la tarjeta que permitirá reiniciar la máquina y así ayudar a Ada a reparar el punzón estropeado. ¿Comenzamos?

<u>Problema 2: "El mensaje oculto"</u>

En el 34 cumpleaños de Ada Lovelace, mientras recibía regalos de todos sus familiares un pequeño sobre encima de la mesa le llamó la atención. Era una carta cuyo remitente decía:

"Para la maga de los números, feliz cumpleaños." Firmado: Mary Somerville[15].

Entusiasmada abrió la carta y la leyó.

> *Querida Ada:*
>
> *Quería felicitarte el día de tu cumpleaños de una manera especial enviándote esta carta. Ha sido un buen año para ti como mujer científica, ya que ha llegado a mis oídos que sigues avanzando con el desarrollo de las calculadoras y las máquinas analíticas. Te admiro por tu trabajo.*
>
> *Ambas somos mujeres matemáticas, y compartimos una gran pasión por los números, y además, debido a tu destreza con la computación, creo que el siguiente reto que te propongo te va a gustar.*
>
> *Se trata de un criptograma, para ello debes descifrar la frase escondida en el siguiente código, te dejo algunas pistas para solucionarlo (ver Tabla 8).*
>
> *9 7 9   12 3 6 5 12 9 -8 5,   12 9   4 R   2 5 R 9   2 10 8 5 R*
>
> *0 11 3 R 2 9 -5   -8 9   7 5   12 9   -6   30 3 R   9*
>
> *Mucha suerte.*
>
> *M. Somerville.*

Escribe tu solución al mensaje oculto:

_ _ _   _ _ _ _ _ _ _ _ _,   _ _   _ _ _ _ _ _ _ _   _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _   _ _   _ _   _ _ _ _ _ _ _ _ _ .

[15] Mary Somerville: (Escocia 1780- Italia 1872) Fue una matemática, astrónoma, geógrafa, escritora e importante científica. Luchó durante toda su vida para conseguir el acceso a la educación de las mujeres.

Pistas		
A: $3\%\ de\ 30$	**J:** Triángulo rectángulo: hipotenusa = 10 cm, cateto a= 6 cm, cateto b=¿?	**S:** $-x^2 =-900$
B: $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\times\frac{7}{5}$	**K:** $\sqrt{225}$	**T:** $A+B-Q-1$
C: $x+6 =-2$	**L:** $x^2 = 144$	**U:** $W/(V-1)$
D: $7^2/(6+B)$	**M:** $-(3x-5) =-B$	**V:** $\frac{2}{3} de\ 9$
E: $A-2{\times}2B$	**N:** $f(x) = x^2-4,\ f(2)$	**W:** Y/X
F: $(3^2-2^3){\times}11$	**O:** $3^0\times3^2{\times}Z$	**X:** $x\%\ de\ 250 = 100$
G: $Z{\times}(-3)^3$	**P:** $100/(5{\times}E)$	**Y:** $20\%\ de\ 1000$
H: $G+3B$	**Q:** $\frac{7}{2}$ de la mitad de 8	**Z:** 3^{-1}
I: $3.1415....$	**R:** R	

Tabla 8: Pistas para descifrar el mensaje oculto.

- Crea nuevos códigos y trabaja con tus compañeros o en grupo.

Aportaciones a la ciencia

En su ensayo *Notas* redactó toda aquella información, que ha contribuido hoy en día al desarrollo de la informática actual. Introdujo el concepto de bucle y subrutina (usadas en los bloques de instrucciones, esencial en la programación actual) y además fue la primera persona en describir un algoritmo para un ordenador, el cual permitía calcular los valores de los números de Bernoulli.

Posteriormente Alan Turing y Von Neumann trabajaron en el desarrollo de los primeros ordenadores gracias al trabajo de Ada.

En la actualidad existe un lenguaje de programación llamado ADA, en honor a esta gran matemática, imprescindible para la navegación aérea y la ingeniería espacial.

Observación del problema

El problema 1: El Bingo de Tarjetas Perforadas, es un juego matemático apto para cualquier edad y curso. Simplemente podemos adecuar las operaciones aritméticas al nivel del curso en el que se desee poner en práctica la actividad. En el *Anexo II* podemos ver un ejemplo de operaciones para 2º de la ESO, con el que trabajamos las unidades didácticas de Números naturales, Números enteros, Proporcionalidad, y Propiedades de las potencias. Con esta actividad pretendemos pasar un rato divertido con los alumnos, a la vez que practican cálculo mental.

El problema 2: "El mensaje oculto", es un ejercicio que al igual que el anterior es apto para cualquier edad y curso, simplemente hay que adecuar las operaciones que conforman las pistas al nivel del curso con el que se desee realizar la actividad. En este caso el ejercicio va dedicado a alumnos de 1º de la ESO, con el fin de repasar contenidos de las unidades didácticas de Números naturales, Fracciones, Ecuaciones de primer grado y Proporcionalidad. Por otro lado, este ejercicio nos sirve para introducir a los alumnos algún concepto sobre la Criptografía[16].

Otros ámbitos

Ada Lovelace es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas y al desarrollo de las máquinas analíticas. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de las siguientes unidades didácticas de los distintos cursos.

- 1º de la ESO: Números naturales, Divisibilidad, Números enteros, Fracciones, Proporcionalidad, Números racionales y Gráficas y Funciones.
- 2º de la ESO: Divisibilidad, Números enteros, Fracciones, Números Racionales, Polinomios, Ecuaciones de primer grado y Funciones.
- 3º de la ESO: Fracciones y números racionales, Sucesiones, Polinomios, Ecuaciones de primero y segundo grado, Sistemas de ecuaciones, Funciones, (logaritmos y exponenciales).
- 4º de la ESO: Fracciones y números racionales, Números reales, Ecuaciones de segundo grado y Sistemas de ecuaciones.
- 1º de Bachillerato: Números reales, Números Complejos, Inecuaciones, Polinomios, Ecuaciones y Funciones.
- 2º de Bachillerato: Ecuaciones lineales, Matrices y determinantes

[16] Criptografía: Arte y técnica de escribir con procedimientos o claves secretas o de un modo enigmático, de tal forma que lo escrito solamente sea inteligible para quien sepa descifrarlo.

También podemos incluir a Ada Lovelace como protagonista de varias actividades en las que se pueden usar el ordenador:

- Actividades que impliquen el uso de GeoGebra, Matemática, Excel, *etc.*
- Actividades de iniciación a la programación, usando ejemplos sencillos.
- Jugar al *Juego de Ada* (*ver Anexo III).*

Conclusión

Ada Lovelace fue denominada con el cariñoso apodo de *"la encantadora de números"*, debido a que sus escritos matemáticos se caracterizaban por estar escritos con un lenguaje florido e imaginativo cargado de poesía.

Ada ha realizado un aporte de gran importancia a las matemáticas, y en especial en el campo de la programación. Se le considera la madre de la informática, dejando atrás el estereotipo en el que el hombre es el único que realiza los grandes descubrimientos en la ciencia. Ada es un ejemplo a seguir, ya que nos recuerda que la tecnología, en concreto el campo de la programación, no son competencias de un único sexo concreto.

Hay una película llamada "*The Imitation Game*" (Tyldum, 2014) , que trata sobre Alan Turing[17]. No trata sobre Ada, pero puede ser útil para tratar temas sobre matemáticas, criptografía, ciencia, informática, *etc.*

[17] Alan Turing (1912-1954): Fue un matemático inglés considerado uno de los padres de la computación y precursor de la informática moderna. Inventó la famosa Máquina de Turing.

9.2.6. *Florence Nightingale*

"La dama de la lámpara"

Contexto histórico

La mitad del siglo XIX se caracteriza por ser un periodo sumido en la estricta etapa victoriana. Debido a la Revolución Industrial, que se inició en Inglaterra a mediados del s. XVIII, surgieron diferentes clases sociales como la burguesía y los barrios obreros, en donde la higiene era prácticamente inexistente y las enfermedades contagiosas se vieron agravadas por dichas condiciones.

Durante el periodo de la reina Victoria, marcado por el puritanismo y el anglicanismo como religión oficial, el papel de la mujer todavía estaba por debajo del hombre, tanto en la vida política, social, doméstica, como en la educación.

Bibliografía

Florence Nightingale nació en Florencia en el año 1829. Hija de una familia británica de clase alta, preocupada por la educación de su hija. Sin embargo, Florence no fue apoyada por ésta a la hora de estudiar enfermería, ya que el rol de una mujer de alta cuna era ser esposa y madre.

Tras dejar todo atrás, con solo 28 años, viajó por numerosos países visitando escuelas hospitales y orfanatos, con el fin de terminar su formación como enfermera.

En 1854 estalló la Guerra de Crimea, durante la cual Nightingale se dedicó a la cura y cuidado de soldados enfermos y heridos. También impulsó medidas para organizar y mejorar el funcionamiento de los hospitales. Al final de la guerra se encargó de elaborar estadísticas sobre la administración de los hospitales y los índices de mortalidad.

Tras la guerra fundó un centro de formación para enfermeras con el fin de dignificar la profesión. Falleció en Hampshire (Reino Unido) en el año 1910, a la edad de 90 años.

Problema contextualizado

Al llegar la noche y caer el silencio en el hospital de guerra de Balaklava (Crimea), Florence Nightingale, con una lámpara de gas en mano, se deslizaba silenciosamente por los corredores de aquel tenebroso lugar, asistiendo a todo tipo de heridos, tanto mujeres como hombres, niños como ancianos y soldados como civiles. Se había ganado el apodo de "La dama de la lámpara", debido a las largas noches que pasaba en vela auxiliando a todo el personal.

<u>Problema 1: "La Estadística de la Guerra"</u>

Florence aprovechaba las noches para apuntar datos relevantes de las mujeres afectadas por la guerra que llegaban diariamente al hospital. Tras el mes de Julio, el mes de guerra más funesto, recabó los datos que aparecen en la Tabla 9.

MUJERES AFECTADAS POR LA GUERRA DE CRIMEA DURANTE JULIO	
Grupos de Edad	**Número de personas**
0-5	50
5-10	64
10-15	49
15-20	80
20-25	71
25-30	95
30-35	120
35-40	124
40-45	113
45-50	175
50-55	44
55-60	35
>60	20

Tabla 9: Datos de las mujeres afectadas por la guerra de Crimea durante el mes de julio.

Florence Nightingale debe finalizar su estudio estadístico con la esperanza de realizar mejoras en todos los hospitales del mundo, y así favorecer la supervivencia de los heridos. ¿Puedes ayudarla?

- *Determina: la población, la muestra, el individuo y la variable, a estudiar.*
- *¿De qué tipo es la variable estadística que Florence está estudiando? ¿Cuál es el tamaño de la muestra? ¿Es significativa? Razona tu respuesta.*

Para realizar un análisis estadístico completo hay que llevar a cabo los siguientes apartados:

1. *Tabla de frecuencias completa: frecuencia absoluta y acumulada, frecuencia relativa y acumulada, porcentajes y grados.*
2. *Calcula las medidas de centralización de la distribución: media, la moda y la mediana.*
3. *Calcula las medidas de dispersión: el rango, la media, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.*
4. *Calcula los cuartiles: Q1, Q2 y Q3.*
5. *Realiza el histograma (uno para la frecuencia absoluta y otro para la frecuencia absoluta acumulada), el diagrama de sectores y el diagrama de cajas y bigotes.*
6. *Dibuja el polígono de frecuencias en ambos histogramas.*

- *Florence asombrada de los resultados, se quedó sin palabras. ¿Qué opinas tú de los datos obtenidos? ¿Qué sector de la población es más vulnerable? ¿Por qué hay menos bajas en personas mayores de 60 años?*

Florence está muy agradecida contigo, ya que con tu ayuda hemos conseguido finalizar el estudio estadístico. Acto seguido tras despedirse de nosotros, Florence cogió su lámpara y continuó con su trabajo.

Problema 2: "La Probabilidad de la Guerra".

PARTE 1

Florence aprovechaba las noches para apuntar datos relevantes de las mujeres afectadas por la guerra que llegaban diariamente al hospital. Tras el *mes de julio, el mes de guerra más funesto, hizo un balance acerca de todas las mujeres que habían pasado por ahí este mes. De las 120 mujeres que, ingresado durante el mes de julio en el hospital de campaña, 48 de ellas eran niñas. Se sabe que han sobrevivido 36 mujeres en total, de las cuales 12 son niñas. Si escogemos una de las mujeres al azar:*

a) Realiza la tabla de contingencia.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña y que haya sobrevivido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de sobrevivir sabiendo que es niña?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sobreviva?

e) ¿Son independientes los sucesos sobrevivir y ser niña?

"Al final las mujeres y los niños son unas de las principales víctimas de las guerras, es una pena", pensó Florence, y continuó con su labor.

PARTE 2

Al día siguiente, Florence reunió a todo el equipo de enfermería para hablar del balance mensual en el hospital. Durante este mes, debido a la precariedad y la poca higiene del hospital, el 20% de los pacientes se ha contagiado con el tifus. Tras realizar unos análisis a todos los pacientes, el 97% de los infectados da positivo, mientras que el 98% de los individuos no infectados da negativo. Si Florence elige un individuo al azar del hospital:

a) Realiza un diagrama de árbol que te ayude a entender la situación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente de positivo en los análisis y padezca la enfermedad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de dar positivo en los análisis?

d) Si sabemos que el paciente ha dado positivo en los análisis, ¿cuál es la probabilidad de que el paciente esté enfermo?

PARTE 3

Una vez finalizado el estudio probabilístico. El general al mando del hospital se acerca a Florence y le pide une un último favor: "Acaban de llegar 10 nuevos heridos y necesitamos de tu conocimiento en probabilidad para organizar los recursos".

a) Si disponemos de 10 camillas, de las cuales 2 de ellas son dobles y una es triple. ¿De cuántas maneras podemos distribuir a los heridos?

b) *Tras mover unos hilos, Florence ha conseguido una camilla para cada uno de los 10 pacientes. Si se quieren organizar las camillas entre los tres pisos que tiene el hospital. ¿De cuántas formas distintas se pueden agrupar?*
c) *En el hospital hay escasez de batas. Hay 10 iguales y 10 de distintos colores. Si elegimos 5 iguales y 5 de colores distintos. ¿De cuántas formas lo podemos hacer? ¿Cuál es la probabilidad de que las 5 batas de colores las coloquemos en una misma habitación de 5 pacientes?*
d) *La probabilidad de que un paciente sobreviva al día es del 20%. Calcula la probabilidad de que sobreviva al menos un paciente durante 5 días.*

El general agradecido se acercó a Florence y le dio las gracias. El general afirmó: "No sé qué hubiera sido de todos estos enfermos sin tu saber matemático y tus conocimientos estadísticos. ¡Es una suerte para las matemáticas y la enfermería tenerte como referente!". Acto seguido se despidieron y Florence cogió su lámpara y continuó con su trabajo.

Aportaciones a la ciencia

Fue una figura importante en el campo de la estadística aplicada a las necesidades médicas y una verdadera pionera en la representación gráfica de datos estadísticos, inventando el diagrama de área polar. Florence puso gran hincapié en la importancia de la recolección de datos, su sistematización, anotación y posteriormente, realización del correspondiente gráfico, ante cualquier investigación aplicada.

Como administradora hospitalaria y gracias a sus estadísticas, influyó en la mejora de los hospitales del país y en las medidas de control de infecciones. Disminuyendo en 1885 la tasa de mortalidad del 60% al 42.7%.

También influyó en la mejora del ámbito educativo para la profesionalización de la enfermería.

Observación del problema

El problema 1: "Estadística de la Guerra", es una actividad dirigida para alumnos de 3º de la ESO de matemáticas académicas, basado en el análisis estadístico completo de los datos, agrupados en intervalos, que aparecen en la

Tabla 9. Es un ejercicio que cubre todos los contenidos de la unidad didáctica de Estadística. Es un buen ejemplo para que los alumnos tengan referencia en sus apuntes de cómo realizar un análisis estadístico completo.

El problema 2: "Probabilidad de la Guerra", es una actividad dirigida para alumnos de 2º de Bachillerato Científico/Tecnológico. El objetivo de este problema es repasar la unidad didáctica de Probabilidad, con problemas que involucren el cálculo de probabilidades y el uso de fórmulas combinatorias. Podemos utilizarlo en una sesión de repaso frente al examen.

Otros ámbitos

Florence Nightingale es una mujer que dedicó gran parte de su vida a la aplicación de la estadística a las necesidades médicas. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de las unidades didácticas del bloque Estadística y Probabilidad de los distintos cursos.

Es importante presentar a esta gran personalidad en problemas contextualizados dirigidos a los alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias de la Salud, ya que puede que les resulte de inspiración y motivación.

También podemos incluir a Florence Nightingale como protagonista de varias actividades y juegos estadísticos.

- Actividades que involucren el uso de Excel.
- La Paradoja del cumpleaños.
- Actividades estadísticas que involucren ejemplos actuales de recortes de periódicos o informativos, sobre política, economía, educación, *etc.*

Conclusión

Florence defendía que la enfermería era una profesión de solo mujeres, mientras que la profesión de médico solo tenía cabida para hombres, una idea que hoy en día prevalece. Fue conocida como "*la dama de la lámpara*", debido a que pasaba muchas noches en vela recorriendo los pasillos del hospital, con una lámpara de aceite en mano, atendiendo a los heridos

Probablemente, podemos considerar a Florence como una de las propulsoras del movimiento feminista. Esto se debe a que es la primera persona en cuestionar el rol de la mujer, planteando la necesidad de que éstas se instruyan y reciban una educación digna.

Existen varias películas sobre la vida de esta mujer: *“The white angel*” (Dieterle, 1936), “*The lady with the lamp*” (Wilcox, 1951), “*Florence Nightingale*” (1985), entre otras.

9.2.7. Sofía Kovalevskaya

“Matemática con alma de poeta”

Contexto histórico

A mediados del siglo XIX el Imperio Ruso estaba gobernado por el zar absolutista Nicolás I. Era delito tener o apoyar las ideas liberales, nihilistas, republicanas, socialistas o defender reformas religiosas.

Fue una época de revolución social y de protesta por parte de los jóvenes rusos. En 1860 surge un movimiento que defendía el derecho al acceso a la educación por parte de la mujer. Consiguieron abrir las puertas de la universidad de San Petersburgo a las mujeres, pero no por mucho tiempo debido a las continuas revueltas sociales. Una vez que la vuelven a abrir, el derecho que habían conseguido las mujeres vuelve a perderse.

Biografía

Sofía Kovalevskaya nace en Rusia en el año 1850 en el seno de una familia burguesa. Su padre fue general de la guardia del zar Nicolás I. Posteriormente Sofía se definirá así misma a través de la siguiente frase: “He recibido en herencia la pasión por la ciencia de mi antepasado, el rey húngaro Matías Corvino; el amor a las matemáticas, la música y la poesía, de mi abuelo por parte de madre, el astrónomo Schubert; mi libertad personal, de Polonia; de mi bisabuela gitana, mi amor por el vagabundeo y la no predisposición a obedecer a las tradiciones; y el resto es mi herencia rusa”.

Desde bien joven tomó contacto con las matemáticas. Tras terminar la secundaria en San Petersburgo, decidió continuar con sus estudios universitarios, pero las mujeres no eran admitidas entonces en las universidades rusas. La universidad más cercana a la cual podía acceder se encontraba en Suiza, como mujer no se le permitía viajar sola sin la compañía de un hombre. Decidió poner solución casándose con Vladimir Kovalevsky.

Fue alumna del mismísimo Karl Weierstrass en la Universidad de Berlín, con el que realizó diversos trabajos. Finalmente consiguió su doctorado en la Universidad de Gotinga, pero no consiguió trabajo teniendo que volver a Rusia donde trabajará como maestra de primaria.

Se exilió a Estocolmo, donde trabajó como profesora de la universidad sin sueldo. Finalmente morirá en 1981 debido a una neumonía.

Problema contextualizado

<u>Problema 1: "Una pesadilla muy matemática"</u>

El tío de Sofía le preparó una sorpresa a su sobrina por su 14 cumpleaños. Éste empapeló las paredes de la habitación de la pequeña Sofía con escritos del famoso matemático Ostrogradski, ya que a ella le encantaban las matemáticas. Todas las noches antes de dormir Sofía se quedaba fascinada leyendo todas esas extrañas fórmulas, que poco a poco para ella iban cobrando sentido. Una noche tormentosa al quedarse dormida leyendo la pared, tuvo una pesadilla en la que perseguía a su tío, pero nunca lo conseguía alcanzar. Tras despertarse alterada fue corriendo a la habitación de su tío y lo despertó contándole lo ocurrido.

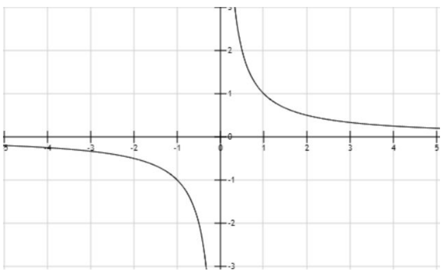
- *¿Podrías decirme con qué concepto matemático podemos relacionar la pesadilla de Sofía?*

Su tío asombrado y entre risas intentó tranquilizarla, para ello intentó que comprendiera la definición de asíntota.

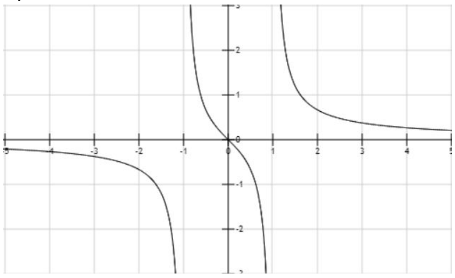
- ***Definición**: La asíntota de una función $f(x)$ es una recta a la que se aproxima la gráfica de una determinada función sin llegar nunca a cortarla.*

Seguidamente su tío sacó un papel y una pluma, y comenzó a dibujar unas extrañas curvas. Tras acabar le propuso a su sobrina que señalara cuál de las figuras podía interpretar su extraña pesadilla.

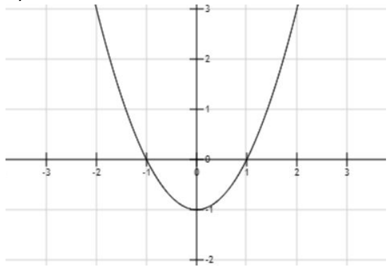
a)



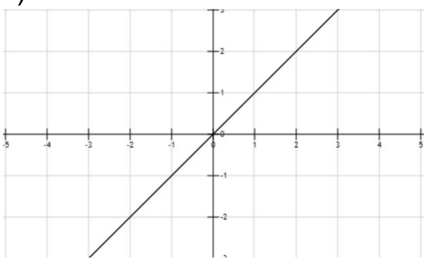
b)



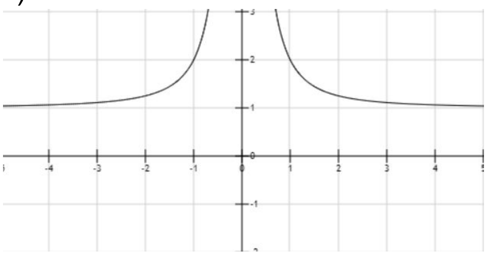
c)



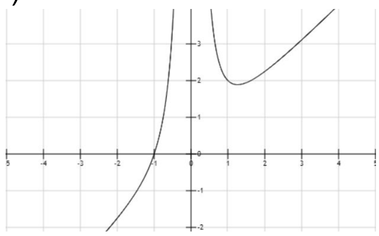
d)



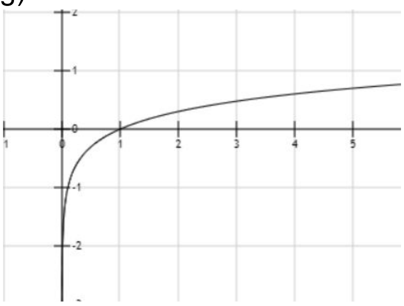
e)



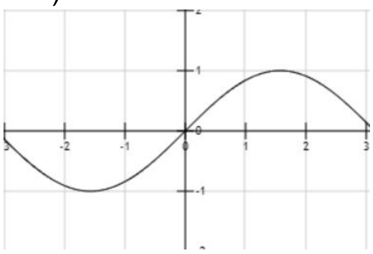
f)



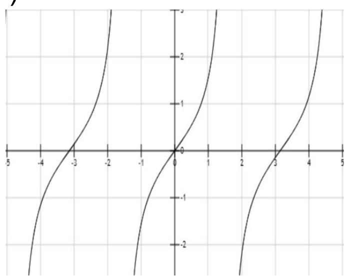
g)



h)



i)



- *¿Podrías ayudar a Sofía a seleccionar aquellas figuras que muestren un comportamiento asintótico?*
- *¿Cuántos tipos de asíntotas existen?*
- *Clasifica las funciones que presentan comportamiento asintótico según el tipo de asíntotas que presenten.*
- *¿Sabrías deducir que gráfica se corresponde con algún tipo de función famosa que se estudia en matemáticas?*

Sofía más calmada le preguntó a su tío por esos comportamientos tan raros que presentaban algunas de las gráficas, ya que había alguna de ellas que no se podían dibujar sin levantar el lápiz del papel (no eran continuas). ¿Puedes ayudar a Sofía a aclararle sus dudas sobre la continuidad de una función?

- *¿Cuántos tipos de discontinuidad en una función conoces?*
- *¿Una asíntota vertical de qué tipo de discontinuidad se trata?*

- *Dibuja varias gráficas en la que aparezcan al menos un ejemplo de cada tipo de discontinuidad.*

Sofía: "¡Muchas gracias! una vez más me habéis ayudado a comprender mejor los conceptos de continuidad de una función". Tras resolver todas sus dudas, Sofía se fue a la cama y durmió plácidamente hasta el día siguiente.

Sofía se despertó como nueva, con mucha confianza en sí misma, ya que es una mujer fuerte, capaz de enfrentarse a cualquier reto que se proponga. Por ello decidió ir más allá y aumentar el nivel de dificultad en cuanto al concepto de continuidad que tantos enredos de cabeza le habían costado la pasada noche. Observó en uno de los papeles de su habitación las siguientes funciones con las que se puso a trabajar:

<u>4º de la ESO</u>

¿Eres capaz de representar la siguiente función y determinar sus características?

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x < -3 \\ 2^{-x} & \text{si } -3 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

<u>1º de BACHILLERATO</u>

Eres capaz de determinar: Dominio, Recorrido y estudio de la Continuidad, de las siguientes funciones a través de su expresión analítica con el uso de límites.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$

<u>Problema 2: "Los anillos de Saturno"</u>

Sofía Kovalevskaya acude todas las semanas a las clases del matemático Karl Weierstrass. Tras ganarse la confianza del matemático alemán, a base de trabajo duro, consiguió que éste fuera su tutor de la tesis, ya que el sueño de Sofía era ser profesora de universidad, y así dedicarse a lo que más deseaba, *las matemáticas. Sofía lleva varias semanas discutiendo el tema del trabajo con Weierstrass, no sabe el tema sobre el que trabajar. Un día un paquete llegó a su casa. Éste llevaba una nota que decía:*

“Por ser la mejor alumna que he tenido nunca, espero que te sirva de inspiración”   K. Weierstrass.

Al abrirlo se llevó una gran sorpresa, era un anillo de oro, con una forma circular perfecta. Emocionada por tan bonito detalle, fruto de su trabajo duro y esfuerzo personal, observó que en el interior del anillo había algo grabado. Al no poder leerlo, debido a la escasa luz de su apartamento, se acercó a la ventana elevando el anillo hacia el cielo. Y de repente le llegó la inspiración: Los anillos de Saturno.

Al momento corrió a contarle a Weierstrass la elección del tema que se le había ocurrido, que se dispuso a apoyarla en todo momento. Acto seguido Sofía se puso a trabajar.

PARTE 1

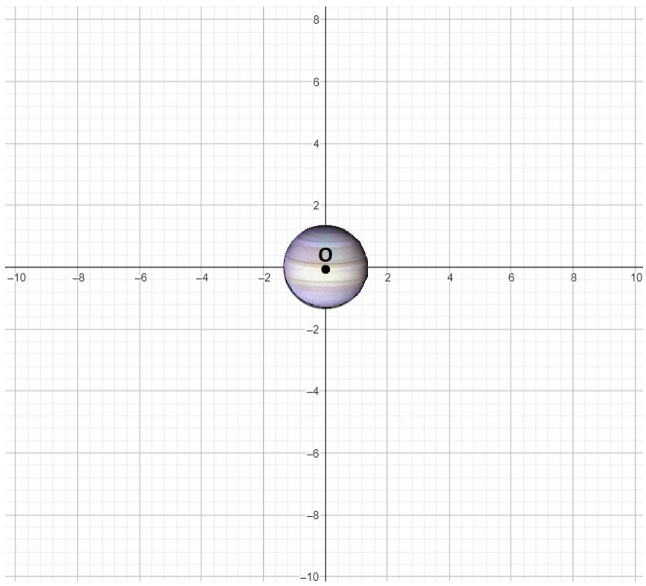


Figura 12: Plano espacial de Saturno, sobre el que dibujar sus anillos.

- *Saturno tiene 4 sistemas de anillos planetarios (A, B, C y D) que lo rodean, éstos fueron observados por primera vez por Galileo Galilei en 1610. Sabemos que los 4 sistemas tienen forma circular. Supongamos que el centro de Saturno está situado en el punto de coordenadas* *espaciales $O(0,0)$. Calcula las ecuaciones general y ordinaria de sus anillos y represéntelos en el plano espacial (ver Figura 12).*

- *El Anillo A tiene centro en O y radio $r = 3$.*
- *El Anillo B es concéntrico al anillo A y pasa por el punto $P(3,3)$.*
- *El Anillo C tiene centro en el punto $C'(-1,0)$ y es tangente a la recta $r: \ -3x \ +4y + 22 = 0$*
- *El Anillo D: tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $s: x + 3y + 3 = 0$ y $t: \ x + y + 1 = 0$, y tiene de radio 8 unidades.*

Sabemos que el planeta orbita alrededor del Sol (tarda 29 años terrestres en completar una vuelta completa al Sol). Si con el movimiento de translación el planeta cambia de posición y por tanto el centro del planeta se traslada siguiendo el vector de translación $\hat{u} = (-3,6)$.

- *¿Seguirá manteniendo el Anillo A la misma ecuación? ¿De no ser así, de qué manera ha cambiado?*

Conclusiones:

- *La circunferencia es el lugar geométrico en la que todos los puntos $P(x,y)$, están a igual distancia de un …………………....*
- *Dado cualquier punto $P(x,y)$ de la circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r. Su ecuación ordinaria es…………………………..*
- *Si desarrollamos la ecuación ordinaria llegamos a la ecuación general que es de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ donde,*

$A =$ …………………

$B =$ …………………

$C =$ …………………

PARTE 2

Tras obtener las ecuaciones de todos los anillos de Saturno. Sofía se dio cuenta de que el planeta, al moverse por su órbita, cambiaba de forma. Con el paso de los años la inclinación de los anillos, con respecto al ecuador del planeta, variaban de una forma muy curiosa, como podemos ver en la Figura 13.

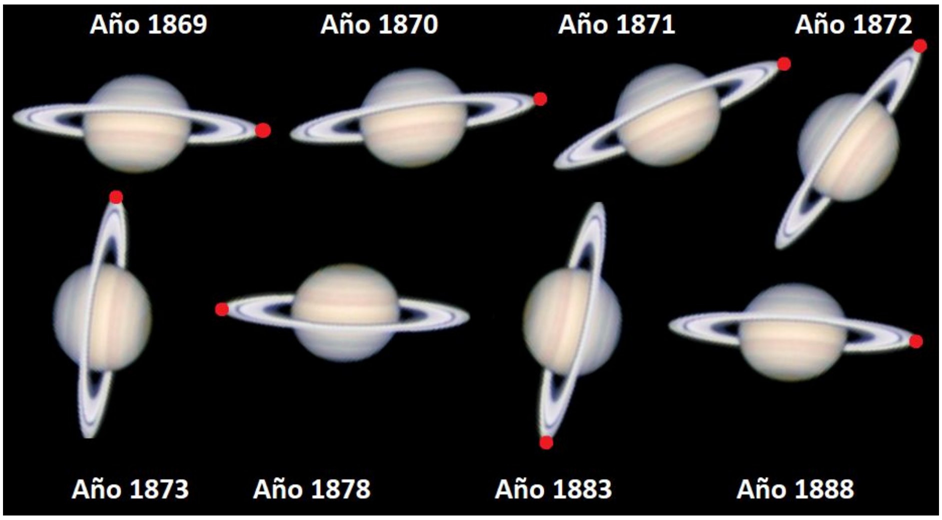


Figura 13: Inclinación de los anillos de Saturno sobre el ecuador del planeta a lo largo 20 años. El punto rojo indica la inclinación del anillo.

Tras 20 años de observación espacial sobre el planeta, Sofía ha decidido recopilar todos los datos en la Tabla 10, a cerca de las distintas inclinaciones que han sufrido los anillos durante estos años. Sin embargo debido al escaso tiempo que tiene por su trabajo, el cuidado de la casa y la educación de sus hijos, no le ha dado tiempo a acabarla.

- *¿Puedes ayudar a Sofía a completar su tabla de ángulos?*

ÁNGULOS NOTABLES								
AÑO	**RADIANES**	**ÁNGULOS**	**SENO**	**COSENO**	**TANGENTE**	**COSECANTE**	**SECANTE**	**COTANGENTE**
1869				1				
1870		30º						
1871					1			
1872			$\frac{\sqrt{3}}{2}$					
1873	$\frac{\pi}{2}$							
1878						INDEFINIDO		INDEFINIDO
1883						0		-1
1888		360º						

Tabla 10: Ángulos notables de los anillos de Saturno.

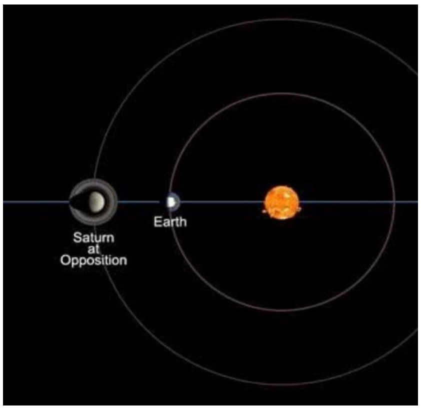
Conclusiones:

- *La identidad más famosa de la trigonometría es……………….*
- *Los ángulos complementarios son aquellos suman ………...*

- *Los ángulos suplementarios son aquellos suman …………….*
- *Las razones trigonométricas de los ángulos complementarios se relacionan de la siguiente manera:*
    - $sen(\theta) =$ ....
    - $cos(\theta) =$ ....
    - $tan(\theta) =$ ....
    - $cosec(\theta) =$ ....
    - $sec(\theta) =$ ....
    - $cotan(\theta) =$ ....

PARTE 3

Para finalizar su tesis sobre Saturno, Sofía nos ha propuesto un ejercicio que trata en medir la distancia entre Saturno y la Tierra, tal y como lo hacía el mismísimo Copérnico. Supongamos que las órbitas planetarias alrededor del Sol son circulares (para facilitarnos los cálculos). Estamos de suerte y es que durante el mes de mayo de este año La Tierra, el Sol y Saturno se van a alinear tal y como aparece en la figura de la derecha. Pasados cuatro meses de esta alineación, la posición entre el Sol, la Tierra y Saturno forman un ángulo de 90º. Si sabemos que en estos cuatro meses la Tierra se ha desplazado 120º, a través de su órbita, en sentido positivo, mientras que Saturno solo 37º, en el mismo sentido (esto es debido a que el movimiento de translación de Saturno es mucho más lento que el de la Tierra) ¿Serías capaz de calcular la distancia entre la Tierra y Saturno?



Aportaciones a la ciencia

Fue la primera mujer matemática que ofreció Rusia, y además fue la primera que puso en duda, lo que hasta entonces era un sentimiento común en toda Europa y Rusia: *"La mujer es inferior al hombre, y no puede competir con él en el campo de la ciencia".*

Sus principales aportaciones a las matemáticas fueron: el Teorema de Cauchy-Kovalevsky, basado en ecuaciones en derivadas parciales; sus estudios sobre la dinámica de los anillos de Saturno; y la investigación sobre la rotación de un cuerpo sobre un punto fijo, con el que consiguió el premio Bordin otorgado por la Academia de las Ciencias de París. Todas sus aportaciones se han utilizado posteriormente hasta nuestros días.

Observación del problema

El problema 1: "Una pesadilla muy matemática", va dirigido a alumnos de 4º de la ESO de matemáticas académicas y a 1º de Bachillerato Ciencias Sociales. Como se puede observar es un problema que sirve para trabajar aspectos de continuidad y asíntotas. Hay una parte común a todos los cursos, que sirve de introducción y otra, cuyos contenidos se pueden adecuar al nivel de enseñanza que se desee, y que en su programación tengan unidades didácticas del bloque de Análisis. Este problema puede servirnos como ejercicio cuya realización se hará en clase.

El problema 2:" Los anillos de Saturno", es un problema que va dirigido a alumnos de 4º de la ESO de matemáticas académicas, con el que pretendemos trabajar la ecuación de la circunferencia y algunos contenidos de la unidad didáctica de Trigonometría. Puede ser útil como ejercicio de repaso, frente al examen.

Otros ámbitos

Sofía Kovalevskaya es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados en diversas unidades didácticas de los distintos cursos.

- 1º de la ESO: Sistema métrico decimal, Gráficas y Funciones, Elementos del plano, Círculos y circunferencias.
- 2º de la ESO: Sistema sexagesimal, Funciones, Elementos en el espacio.
- 3º de la ESO: Gráficas y funciones, Geometría plana, Movimientos en el plano.
- 4º de la ESO: Trigonometría, vectores y funciones.
- 1º de Bachillerato: Trigonometría, Números complejos, Lugares geométrico, Sucesiones, Límites, Funciones, Representación gráfica, Derivadas y sus aplicaciones.

- 2º de Bachillerato: Calculo y aplicación de las derivadas, Integrales, Teoremas famosos (Teorema de Weierstrass) y Geometría analítica.

También podemos incluir a Sofía Kovalevskaya como protagonista de varias actividades recreativas relacionadas con la Geometría como:

- Trabajos sobre astronomía, los planetas y otros astros. Por ejemplo: cómo medir el radio de la tierra con un *palo-selfi*.
- Ejercicios de trigonometría para medir distancias en la vida real. Por ejemplo: medir la altura de una montaña a partir de dos observadores que estén a una cierta distancia

Conclusión

Sofía Kovalevskaya consiguió llegar al concepto del *seno* estudiando trigonometría por cuenta propia. Además, desde bien pequeña empezó a manejar conceptos como el de *asíntota e infinito*, los cuales discutía con su tío.

Se dice que de pequeña empapelaron su habitación con escritos de Ostrogradski[18] sobre calculo diferencial e integral. Hecho que posteriormente facilitará su aprendizaje debido a la familiarización con las fórmulas.

Sonia es una variante del nombre griego Sofía, por lo que hay muchas referencias a esta mujer, en libros de historia con el nombre de Sonia Kovalevsky, con el apellido de su marido.

Sofía es un ejemplo de superación y esfuerzo, no solo por su ambición en el estudio de las matemáticas, sino también por su carácter rebelde y luchador a favor de los derechos de las mujeres, especialmente en la educación. A pesar de la discriminación que sufrió por ser mujer y gitana, consiguió salir adelante sin rendirse ante las dificultades de la época.

Hay una película biográfica que lleva su nombre, "*Sofía Kovalevskaya"* (Shakhmaliyeva, 1985).

[18] Mijaíl Ostrogradski (1801-1862): Matemático y físico ucraniano.

9.2.8. Emmy Noether

“La mujer más importante en la Historia de las Matemáticas”

Contexto histórico

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX se produce la unificación de Alemania al mando del canciller Otto V. Bismark. Este país vive un periodo de gran desarrollo nacional con medidas que favorecen el crecimiento industrial. Este hecho provoca que se convierta en la nación más poderosa de Europa.

En 1914 estalla la I Guerra Mundial. Tras la derrota de Alemania, se le impone el Tratado de Versalles, por el cual debe pagar por la guerra. Esto sume al país en un periodo de inestabilidad económica y decadencia, que desencadenará la aparición del nacionalismo y la llegada de Adolf Hitler (1933) al poder.

En aquella época el acceso a las cátedras y los consejos de las universidades estaban limitados exclusivamente a los hombres.

Biografía

Amalie Emmy Noether nació en 1882 en Erlangen (Alemania), hija de Max Noether, un notable matemático de procedencia judía, profesor de la universidad de Erlangen.

A los 18 años consiguió el título de profesora de idiomas, que más tarde utilizará para impartir clases en diversas instituciones. Pero a ella lo que le apasionaba de verdad eran las matemáticas. Acudía como oyente a las clases de su padre en la universidad, donde tuvo la oportunidad de colaborar con él dando clase sin recibir remuneración alguna. Consiguió finalmente la cátedra en la universidad de Gotinga, donde trabajará con matemáticos como F. Klein y

D. Hilbert. Pero la llegada Hitler al poder, provocó su exilio a los Estados Unidos.

En EE.UU. conocerá y trabajará junto a Albert Einstein en el desarrollo de su Teoría de la Relatividad, sin embargo sus aportaciones matemáticas no se valorarán hasta pocos años antes de su muerte. Falleció con 53 años en 1935, a causa de un tumor.

Problema contextualizado

<u>Problema: "Enseñando a Einstein"</u>

Un día Emily se encontraba en su Despacho de la Universidad de Princeton discutiendo con Albert Einstein algunos aspectos de la Teoría de la Relatividad. En concreto, Einstein estaba estudiando la geometría y los movimientos que se dan en el espacio. Y como Emily era una notable experta matemática en el campo de la geometría espacial, éste no dudó ni un momento en acudir en su ayuda. Emily pidió a Albert que tomara asiento y sacó de un cajón, un mapa cuadriculado con números y letras como el que aparece en la Figura 14.

<u>TRASLACIONES</u>

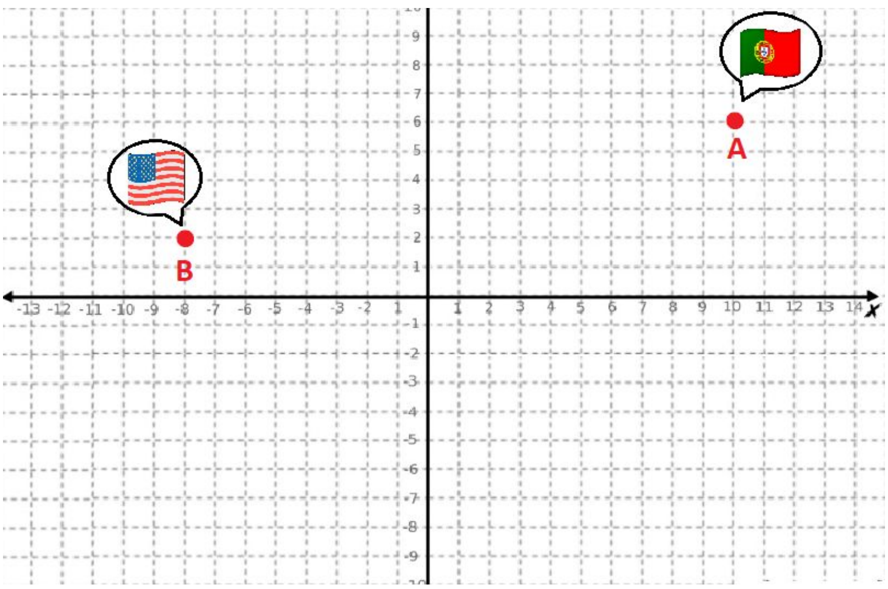


Figura 14: Mapa cuadriculado para trabajar la translación

Emily le dijo lo siguiente: "Imagina que estamos montados en un barco mercantil, tratando de huir exiliados de los alemanes y del imperio nazi, situado en el Oporto y cuyas coordenadas en nuestro mapa son $A(10,6)$. *Y para* *alcanzar un lugar seguro tenemos que viajar hasta Nueva York (EE.UU), que en nuestro mapa se encuentra en el punto de coordenadas $B(-8,2)$.”*

1. *¿Cuál es el vector de traslación que ha seguido el navío para llegar desde Oporto hasta Nueva York?*
2. *Tras desembarcar en Nueva York, el navío debe continuar su ruta hasta llegar a Sao Paulo. Para ello debe moverse 4 unidades al Este y 5 unidades hacia el Sur. ¿Cuál es el vector de translación en este caso? ¿En qué punto del mapa se encuentra la ciudad de Sao Paulo?*

***Conclusiones**:*

- *Una translación es el movimiento de una figura en las que todos sus puntos*
    - *a) se mueven en la misma dirección pero con distintas distancias.*
    - *b) se mueven en la misma dirección y la misma distancia.*
    - *c) se mueven en distintas direcciones pero con la misma distancia.*
    - *d) se mueven en distintas direcciones y con distintas distancias.*
- *El resultado que se forma tras una translación es una figura…………………*
- *Da algún ejemplo de la vida cotidiana donde se utilicen las traslaciones.*

Einstein: “¡Eureka! Ahora entiendo un poco mejor cómo se trasladan los objetos en el espacio. Quiero saber más.”

SIMETRÍAS

Acto seguido Emily sacó un espejo y le dijo: “Como bien sabes querido Albert, en la naturaleza todo tiende a ser simétrico, las personas, las flores, los animales, etc.” (Ver Tabla 11)

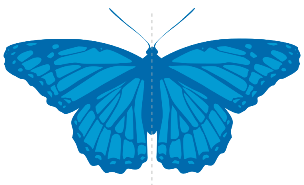
Simetría axial	**Simetría central**	**Simetría radial**
		

Tabla 11: Tipos de simetrías y ejemplos que podemos encontrar en la naturaleza.

Emily siguió rebuscando por sus cajones y sacó una naranja que tenía guardada para el almuerzo, la partió por la mitad y la puso frente al espejo. Ahora es tu turno:

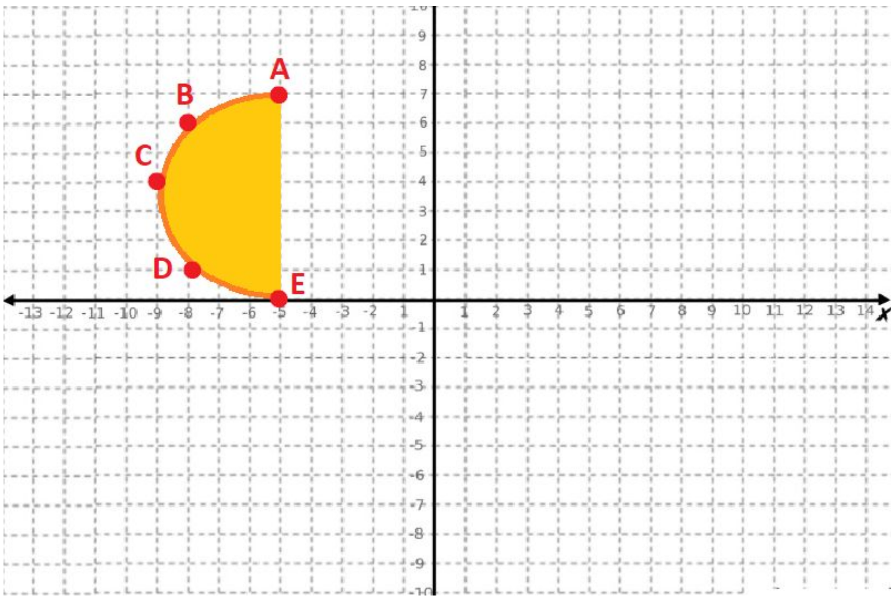


Figura 15: Mapa cuadriculado para trabajar la simetría.

1. *¿Serías capaz de dibujar la naranja reflejada en el espejo en el mapa cartesiano de la Figura 15 a través del eje de ordenadas? Indica los puntos asociados tras realizar la simetría. ¿De qué tipo de simetría se trata? Razona tu respuesta.*
2. *Intenta ahora dibujar la media naranja simétrica respecto al origen de coordenadas. Indica los puntos asociados tras realizar la simetría. ¿De qué tipo de simetría se trata? Razona tu respuesta.*

Conclusiones:

- *En el ejemplo hemos visto dos tipos de simetrías,*
  - *Simetría ………………...: también conocida como simetría a través de un eje. Es aquella transformación en la que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P', de manera que el eje sea …………….. del segmento PP'.*
  - *Simetría …………………: también conocida como simetría a través de un punto O. Es aquella transformación en la que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P', de manera que el punto O sea ………………….. del segmento PP'.*

- Simetría ……………..: también conocida como simetría a través de una o varias circunferencias. Es aquella transformación en la que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P', de manera que el centro de la circunferencia C, es el punto medio del segmento PP'.

- *En la simetría axial se conserva:*
  - a) *las longitudes, los ángulos y el sentido entre los puntos de la figura.*
  - b) *los ángulos y el sentido, pero no las longitudes respecto a la figura inicial.*
  - c) *las longitudes y el sentido, pero no los ángulos respecto a la figura inicial.*
  - d) *las longitudes y los ángulos, pero no el sentido respecto a la figura inicial.*
- *Da algún ejemplo de la vida cotidiana donde se utilicen las simetrías.*

Einstein: "¡Eureka! Ya entiendo las simetrías, son muy sencillas. Quiero saber más."

GIROS

Ya solo nos queda un tipo de movimiento por ver, dijo Emily. Al ver la cara de entusiasmo de Albert, Emily sacó de su cajón una catapulta en miniatura la cual estaba atascada y solo se desplazaba 90º en sentido negativo.

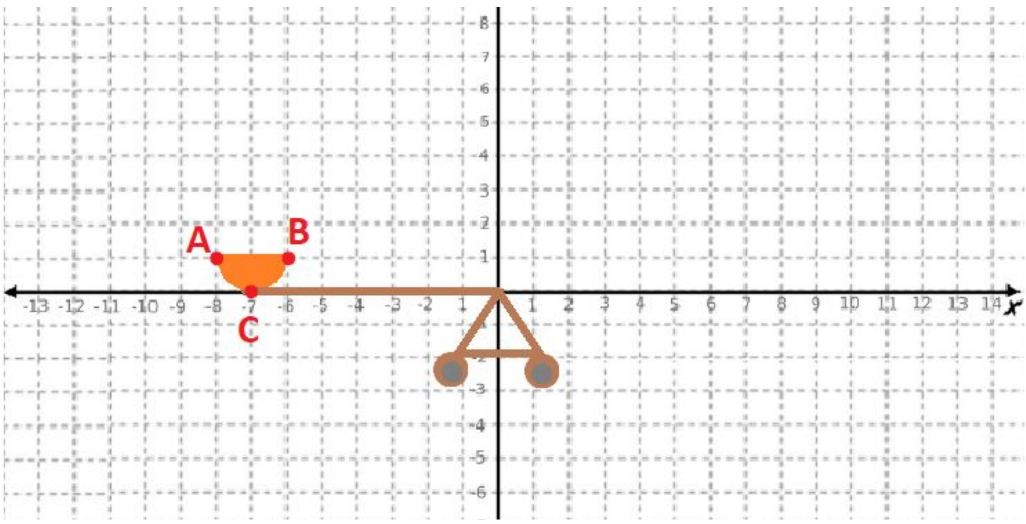


Figura 16: Mapa cuadriculado para trabajar el giro.

1. *Supongamos que el cuerpo de la catapulta se encuentra en el origen de coordenadas de nuestro mapa, y el brazo lanzador situado sobre el semieje negativo de abscisas. Si la amplitud del brazo es de 7 unidades*

y su cuchara[19] tiene forma de semicírculo, tal y como aparece en la Figura 16. Calcula la posición de los puntos de la cuchara tras realizar el giro. Haz el dibujo de la cuchara tras el giro.

Como Emily era una manitas, no solo en matemáticas, si no también en temas de carpintería, consiguió arreglar la catapulta desatascando el mecanismo y consiguiendo que el brazo girase 180º en sentido negativo.

2. *Manteniendo el centro de giro, calcula las nuevas coordenadas asociadas de los puntos correspondientes a la cuchara tras el giro. Haz el dibujo de la cuchara tras el giro.*

Tras realizar muchos intentos con la maqueta, el mecanismo se acabó rompiendo y cediendo, haciendo un giro de una amplitud de 270º en sentido negativo.

3. *Manteniendo el centro de giro, calcula las nuevas coordenadas asociadas de los puntos correspondientes a la cuchara tras el giro. Haz el dibujo de la cuchara tras el giro.*

Conclusiones:

- *Hay tres elementos que intervienen en el movimiento de rotación o giro: ………., …………… y ………….. del giro.*
- *El punto P' es el punto obtenido tras realizar un giro de centro en O, y ángulo α, del punto P. Se cumple que:*
    a) *la distancia OP es mayor que la distancia OP'.*
    b) *la distancia OP es menor que la distancia OP'.*
    c) *la distancia OP es igual que la distancia OP'.*
    d) *la distancia OP es el doble que la distancia OP'.*
- *El sentido positivo es aquel:*
    a) *correspondiente al movimiento de las agujas del reloj.*
    b) *correspondiente al movimiento contrario a las agujas del reloj.*
    c) *correspondiente a la oscilación de un péndulo.*
    d) *correspondiente a la caída de un asteroide.*
- *La rotación o giro es un movimiento a través de un punto que:*
    a) *mantiene la forma y el tamaño de la figura original.*
    b) *no mantiene la forma pero sí el tamaño de la figura original.*
    c) *mantiene la forma pero no mantiene el tamaño de la figura original.*

[19] cuchara: Parte de la catapulta en forma de recipiente donde se alojan los proyectiles previamente a ser lanzados.

d) no mantiene ni la forma ni el tamaño de la figura original.

- *Da algún ejemplo de la vida cotidiana donde se utilicen los giros.*

Einstein agradecido le dijo: "¡Eureka! Ya entiendo cómo funcionan los giros. Creo que con toda esta información ya puedo continuar con mi teoría. ¡Muchas gracias Emily!" Antes de que Albert se dispusiera a salir por la puerta, le propuso el siguiente problema, para comprobar si era verdad que había entendido todas sus explicaciones:

- *El Cometa Halley, es un asteroide que pasa alrededor del Sol cada 75 años. Supongamos que el cometa tiene forma triangular, cuyos vértices se encuentran en los puntos de nuestro mapa cartesiano* $A(-9,7)$, $B(-6,3)$, $C(-6,8)$. *Sabemos que desde la Tierra, que se encuentra en el origen de coordenadas, es visible durante un corto periodo de tiempo, y realiza los siguientes movimientos:*

1. *S1: Tras cruzar el cinturón de asteroides situados en la recta* $x=-4$*, el cometa realiza una simetría axial.*
2. *T1: Se acerca al Sol a través del vector de traslación* $\hat{U}=(2,-1)$.
3. *G1: Al entrar en órbita con el Sol, que se encuentra en el punto* $(0,-2)$*, gira respecto a él un ángulo de -180º en sentido positivo.*
4. *T2: Finalmente sale de la órbita solar siguiendo el vector de traslación* $\hat{I}=(3,3)$.

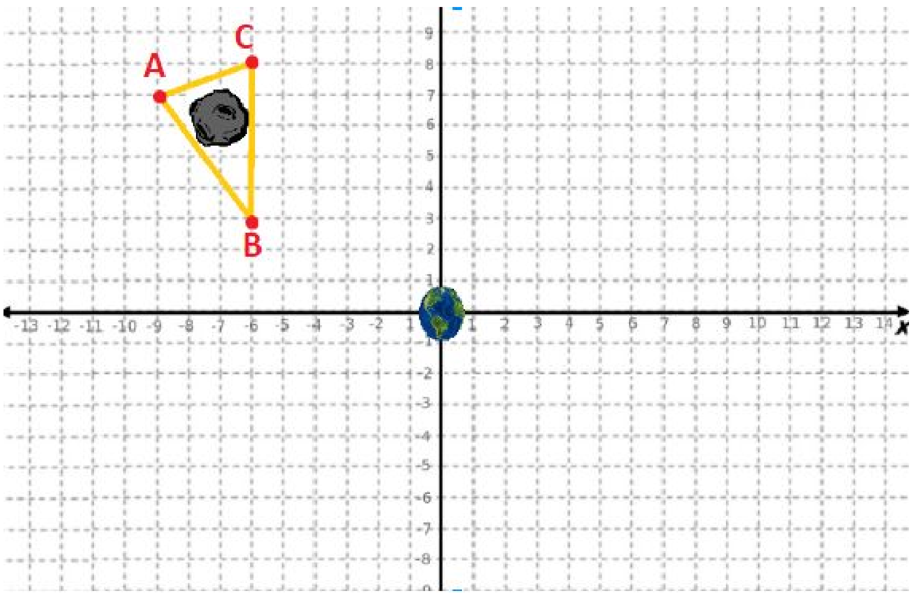


Figura 17: Mapa cuadriculado para trabajar la composición de movimientos en el plano.

Calcula la posición final del cometa realizando la composición de los cuatro movimientos en el plano anteriores (S1, T1, G1 y T2).

Aportaciones a la ciencia

La principal aportación de Noether a las matemáticas es el desarrollo de un nuevo campo denominado álgebra abstracta. En concreto, cabe destacar el Teorema de Noether, que relaciona el álgebra con el análisis, y que ha sido de vital importancia en la física teórica.

De no ser por las aportaciones de Emmy, la Teoría de la Relatividad de Einstein no hubiera existido.

Observación del problema

El problema: "Enseñando a Einstein", está dirigido a alumnos de 3º de la ESO de matemáticas aplicadas, con el fin de trabajar los contenidos de la unidad didácticas Movimientos en el plano. Se utilizará como instrumento de autoevaluación para el alumno, ya que el ejercicio dispone de preguntas tipo test. La última pregunta, correspondiente al *Cometa Halley* sirve como nexo de unión de todos los contenidos vistos previamente durante el ejercicio.

Otros ámbitos

Emmy Noether es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas, en concreto a la rama más algebraica. Por tanto, podemos incluirla en problemas contextualizados de diversas unidades didácticas para los distintos cursos. Generalmente serán unidades didácticas del bloque de Álgebra y Geometría.

- 1º de la ESO: Elementos del plano.
- 2º de la ESO: Polinomios, Ecuaciones de primer grado y Elementos del espacio.
- 3º de la ESO: Ecuaciones de primer y segundo grado, Sistema de ecuaciones, Geometría plana, Movimientos en el plano y Elementos del espacio.
- 4º de la ESO: Polinomios, Ecuaciones, Inecuaciones, Vectores y Sistemas de ecuaciones.

- 1º de Bachillerato: Polinomios, Inecuaciones, Ecuaciones y Lugares geométricos.
- 2º de Bachillerato: Geometría analítica.

También podemos incluir a Emmy Noether como protagonista de varias actividades recreativas como:

- Introducción al Principio del palomar.
- Introducción a las geometrías no euclídeas: geometría elíptica y geometría hiperbólica; como geometrías que intentan explicar la forma del Universo.

Conclusión

Era tal la devoción que esta mujer suscitaba entre sus alumnos, que en Gotinga eran conocidos como *"los chicos/las chicas de Noether"*. Como curiosidad, hubo quien se refería a ella de forma cariñosa con el apelativo de *"el Noether"*.

Emmy es considerada por Einstein y Hilbert, como la matemática más importante de la historia. Poseía un currículum matemático brillante, hecho que no fue suficiente para conseguir un puesto de trabajo en la universidad acorde a su persona e intelecto. Su vida no fue fácil y tuvo que enfrentarse en muchas ocasiones al rechazo, generalmente por causa de sus orígenes judíos y sobre todo por su condición de mujer. Murió sin recibir el conocimiento que merecía.

Hay varios libros de texto que tratan sobre la vida de Emmy. El primero es un libro infantil muy ilustrado, dirigido a niños de entre 8 y 10 años llamado "*La extraordinaria Emmy Noether"* (Barria y Celedón, 2016) ; el segundo libro es más bibliográfico llamado "*Emmy Noether. Una matemática ideal"* (Laserna, 2005).

9.2.9. *Katherine Johnson*

"La calculadora humana"

Contexto histórico

Tras el fin de la I Guerra Mundial, Estados Unidos se sumerge en un periodo denominado "*Los felices años 20".* Fue una época de prosperidad y crecimiento económico, que finalizará en 1929 con la caída de la Bolsa de Nueva York (*Crack del 29)*, sumiendo a Estados Unidos en una gran depresión. Destacan hechos históricos como la instauración de la Ley Seca y el derecho de la mujer al voto.

Entre los años 1920 y 1930, el crecimiento económico permitió a muchas mujeres de clase media trabajar como maestras, secretarias y algunos oficios temporales. Por otro lado aumentó la tasa de mujeres matriculadas en la universidad. Esta etapa es considerada como una época de plena segregación racial, en la cual se aprobaron leyes que defendían la separación de espacios y servicios en función de la descendencia y el color de piel. Es por ello, que la población afroamericana lo tenía mucho más difícil a la hora de labrarse una educación completa, ya que por lo general no estudiaban más del octavo curso en su condado natal. En consecuencia, ocupaban los puestos de menor cualificación.

Biografía

Katherine Johnson nació en 1918 en Virginia Occidental (EE.UU.), en el seno de una familia afroamericana. Los padres de Katherine decidieron que sus hijos recibieran una buena educación, enviándoles a un colegio exclusivo para personas de color.

Desde muy pequeña mostró aptitudes en matemáticas. A los 18 años se graduó en Matemáticas y Francés por la escuela de estudios superiores *West Virginia State College*. Tras finalizar sus estudios se puso a trabajar como profesora, fue entonces cuando sufrió las consecuencias del racismo por primera vez.

En 1953 entró a trabajar a la NASA como "*Calculadora*[20]", donde se encargaba de realizar todas las operaciones y comprobaciones de cálculo que requerían los ingenieros aeronáuticos. Motivada por la curiosidad fue acudiendo a reuniones con dichos ingenieros, dónde comenzó a destacar, no solo por sus conocimientos, sino también por sus capacidades de liderazgo. Jugó un papel de vital importancia, en proyectos espaciales como el *Apollo 11, Proyecto Mercury y Apollo 13*.

Actualmente, se dedica a dar charlas entre jóvenes, especialmente mujeres, sobre la importancia de luchar por los sueños por encima de todo. Y las anima a que estudien ciencia y tecnología.

Problemas contextualizados

<u>Problema: "Las derivadas, el camino hacia la Luna"</u>

PARTE 1:

La NASA[21] ha encomendado a Katherine Johnson una tarea muy importante que va a ser crucial para la misión de enviar el primer hombre a la Luna. En la construcción del Apollo 11, la nave con la cual Neil Armstrong logrará alcanzar el satélite, son necesario costos materiales y arduos cálculos matemáticos. En particular la parte más cara del proyecto es el tanque de combustible de la nave. Éste es un recipiente cilíndrico cuya capacidad es de 160 millones de litros de hidrógeno líquido como el que aparece en la Figura 18. La tarea encomendada para esta gran matemática es calcular las dimensiones del tanque de combustible para que los materiales utilizados en su construcción sean mínimos. ¿Cuál es el área del tanque?

[20] Las Calculadoras de la NASA: fue un puesto de trabajo de la NASA generalmente formado por mujeres de color. Éstas se dedicaban a la realización de las operaciones matemáticas antes de la llegada de los ordenadores.
[21] NASA: Administración Nacional de Aeronáutica en el Espacio (EE.UU.).

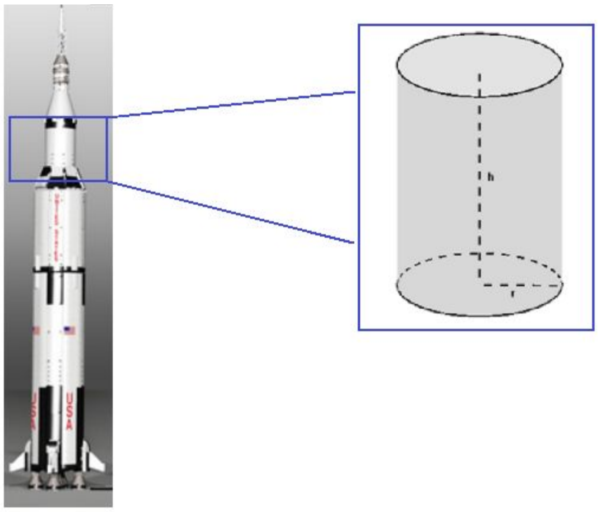


Figura 18: El Apollo 11 y el tanque de combustible que debemos optimizar.

PARTE 2:

Tras el exitoso despegue del Apollo 11, toda la NASA está de celebración, incluida Katherine Johnson, ya que sin ella esta misión no hubiera sido posible. ¡Un momento! Parece que algo va mal. Durante el despegue la nave ha perdido combustible, debido a una fuga en el depósito. La única manera de que la expedición lunar continúe su rumbo es haciendo que la nave de una vuelta completa a la órbita alrededor de la Tierra y así, gracias a las fuerzas gravitacionales del planeta, coja el impulso necesario para llegar hasta la Luna.

De inmediato, el jefe de la NASA se acerca a Katherine y le pide que realice las tareas de cálculo necesarias para recalcular la nueva trayectoria de la nave. Ésta sin perder un instante de tiempo, saca un mapa de coordenadas de un cajón y se pone a recopilar algunos datos.

La órbita alrededor de la Tierra tiene la forma de una elipse. Sabemos que la Tierra está centrada en el punto de coordenadas espaciales $C(5,1)$ *y los focos se corresponden con dos observatorios espaciales que la NASA dispone en el ecuador terrestre. Uno situado en el punto más al este* $E(3,1)$ *y el otro en el punto más al oeste* $O(7,1)$ *del globo terráqueo. Sabemos que actualmente la nave se encuentra en órbita, ya que manda señales de alerta a ambos observatorios. Tras analizar las señales, se sabe que la distancia del punto de la órbita, donde se encuentra la nave, al foco del este es de 2 unidades, y la distancia al foco del oeste es de 6 unidades.*

1. *Calcula la ecuación de la órbita elíptica en la que se encuentra la nave. Indica todos los elementos de la elipse. Haz un dibujo aproximado.*
2. *¿En qué punto de la órbita elíptica se encuentra la nave?*
3. *Para que la nave llegue a la Luna siguiendo una trayectoria recta y tangente, ésta debe desengancharse de la órbita elíptica en el punto de abscisas $x=3$. ¿Es única la recta tangente? Calcula la ecuación de las posibles rectas tangentes.*
4. *Katherine sabe que a esta hora del día y en esta época del año, la Luna se encuentra sobre el eje de abscisas. Si sabemos que la nave orbita alrededor de La Tierra en sentido positivo, y se desengancha de la órbita en el punto de abscisas $x=3$. Calcula las coordenadas espaciales de la Luna.*

Tras restablecer todos los datos y las trayectorias. La misión espacial concluyó de manera exitosa. Los astronautas consiguieron llegar a su destino y volver a la Tierra sanos y salvos. El astronauta Neil Armstrong dedicó a Katherine unas palabras desde la Luna: "¡Es un pequeño paso para las matemáticas, pero un gran paso para la figura de la mujer en la ciencia!"

Aportaciones a la ciencia

Katherine Johnson contribuyó al desarrollo de varios programas espaciales de la NASA en EE.UU. Podemos afirmar que sin sus cálculos el hombre no hubiera pisado la Luna.

El hecho de dejar atrás su puesto de "*Calculadora*", un trabajo condicionado a mujeres de color, y conseguir un puesto de trabajo de mayor importancia, implicó el fin de las barreras de género y raciales dentro de una institución tan importante como es la NASA. Esto supuso un gran paso hacia la igualdad en aquella época.

Observación del problema

El problema: "Las derivadas, el camino hacia la Luna", es una actividad dirigida a alumnos de Bachillerato, en especial a alumnos de 1º de Bachillerato Científico/Tecnológico. Con ella pretendemos trabajar la unidad didáctica de Cálculo de derivadas y sus aplicaciones. El problema tiene dos partes, la primera es un ejercicio de optimización; y la segunda está basada en el cálculo de la recta tangente a una cónica (elipse) mediante el uso de derivación implícita.

Otros ámbitos

Katherine Johnson es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas, en concreto aquel relacionado con la astronomía. Por tanto podemos incluirla en problemas contextualizados de diversas unidades didácticas para los distintos cursos. Generalmente serán unidades didácticas del bloque de Geometría (analítica) y Análisis.

- 1º de la ESO: Gráficas y funciones..
- 2º de la ESO: Gráficas y funciones.
- 3º de la ESO: Movimientos en el espacio, Gráficas y Funciones.
- 4º de la ESO: Funciones y Ecuaciones.
- 1º de Bachillerato: Vectores y producto escalar, Ecuaciones, Lugares Geométricos, Sucesiones, Límites, Cálculo de derivadas y sus aplicaciones y Representación gráfica.
- 2º de Bachillerato: Todo el bloque de Geometría analítica (matrices, determinantes, puntos, rectas, planos, *etc.)* y todo el bloque de Análisis (límites, derivadas, integrales, *etc.)*.

También podemos incluir a Katherine Johnson como protagonista de varias actividades recreativas como acertijos y paradojas matemáticas.

- La paradoja del giro de la Luna.
- Una actividad muy útil para los cursos de la ESO es la de cálculo mental. La realizaremos una vez por semana y en un minuto de tiempo el alumno debe resolver el número máximo de operaciones dadas.

Conclusión

Una curiosidad sobre Katherine es que todo lo contaba, desde los pasos que daba hasta los platos que fregaba. Por ello sus allegados le llamaban de forma cariñosa: *“la niña calculadora”.*

Otro dato curioso a destacar, es que fue la única mujer seleccionada para realizar estudios de postgrado en la Universidad de Virginia, pero debido a problemas familiares no consiguió acabar sus estudios.

Con una enorme pasión por las matemáticas, gracias a las cuales logró acabar con las barreras raciales y de género, Katherine Johnson es considerada una leyenda de los viajes espaciales. Fue capaz de alcanzar la Luna, con la ayuda de un lápiz, un papel y una calculadora.

En 2016 se estrenó "*Figuras ocultas*" (Melfi, 2016), una película muy inspiradora que relata la realidad por la que tuvo que pasar Katherine durante su estancia en la NASA.

9.2.10. María Dolores Zapata

“Moderna y brillante. Pasión por la docencia”

Contexto histórico

La segunda mitad del siglo XX España se ve sumida en una época de cambios. Tras el fin de la dictadura franquista en 1975, se instaura como forma de gobierno una monarquía parlamentaria, que durará hasta nuestros días.

Durante la etapa franquista la educación, marcada por la religión, estaba separada por sexos. Las mujeres eran educadas sobre todo para realización de labores del hogar.

Al consolidarse la monarquía, la España rural comienza a modernizarse en todos los aspectos, debido a los cambios y reivindicaciones sociales. El sistema educativo español ha evolucionado notablemente durante los últimos 50 años, de tal modo que la presencia de las mujeres en los colegios y universidades, hoy en día, es cada vez mayor.

Biografía

M.ª Dolores Zapata nació en Arnedo en el año 1959. Creció en el seno de una familia de clase media, preocupada en todo momento por la educación de sus hijos. Su madre era comerciante y su padre llegó a ser director de una de las sucursales bancarias de la ciudad.

Desde bien joven comenzó a interesarse por las matemáticas, ayudando a su padre en temas de contabilidad de la familia. Más tarde decidirá estudiar matemáticas, sirviendo de inspiración al resto de sus hermanos, los cuales estudiarán matemáticas unos años más tarde. Se graduó en Matemáticas en el año 1981 por la Universidad de Zaragoza. Un año después de finalizar sus estudios, logró aprobar las oposiciones a la primera, consiguiendo su plaza fija como profesora de matemáticas. Tiene su mérito, ya que dicha convocatoria era a nivel estatal en la cual solo había 70 plazas disponibles para toda España.

Trabajó como profesora de matemáticas en Olivenza (Badajoz), Logroño (La Rioja) y Miranda de Ebro (Burgos). Finalmente en 1990 se establecerá en Arnedo, donde formará una familia y conseguirá un puesto de trabajo en el IES Celso Díaz de Arnedo, en el cual continúa dando clases hasta el día de hoy.

Problema contextualizado

<u>Problema: "El chico de prácticas"</u>

"Hoy va a ser un día especial". Pensó impacientada la profesora de matemáticas, M.ª Dolores Zapata, mientras esperaba, en la sala de profesores de aquel viejo instituto (IES Celso Díaz, Arnedo), la llegada del nuevo chico de prácticas. A los pocos minutos, un chico con aspecto nervioso llegó. Era un universitario recién graduado, con poca experiencia en el mundo de la docencia, y con ganas de aprender el arte de la enseñanza matemática.

"¿Estás preparado para esta nueva etapa?", preguntó la profesora. El alumno se había quedado bloqueado, debido a los nervios, y no podía articular palabra. Dolores trató de calmarlo, y parece que lo consiguió. Acto seguido le dijo: "Como regalo de bienvenida voy a darte unos pequeños recursos matemáticos que puedes utilizar en los distintos cursos de Secundaria y Bachillerato". El alumno se sentó y tomó nota.

Para los alumnos de 1º de la ESO en el tema de Funciones, se lían al nombrar los ejes cartesianos, debido a que es un tema completamente nuevo para ellos. Por tanto una regla mnemotécnica que puedes usar cuando desarrolles la unidad es la siguiente:

> *"Pidiendo un poco de ORDEN en la sala y haciendo, a su vez un gesto con la mano de una línea vertical, es una buena forma de que los alumnos recuerden que el eje vertical (o eje Y) es conocido como el eje de ordenadas. Para el eje horizontal (o eje X), puedes remarcar la palabra "abscisaX" acabándola en -X en vez de -S, y así permitir que el alumno asocie conceptos."*

Para los alumnos de 2º de la ESO en el tema de Fracciones y sus operaciones, se confunden sobre todo en la división de fracciones, ya que todavía no han desarrollado su visión matemática. Es por ello que puedes usar "La Regla del caramelo".

> *"La división de fracciones en horizontal se realiza en cruz (es lo mismo que multiplicar por el inverso de la fracción de la derecha), y la forma que sigue ésta asemeja a la de un caramelo."*

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{10}{21}$$

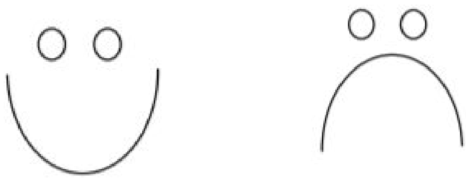
Para los alumnos de 3º de la ESO, en el tema de Geometría. Una buena forma de que recuerden la fórmula del volumen de un cilindro es la siguiente:

> *"Puedes pedirles que te calculen el volumen de una pizza de radio "Z" y altura "A", la solución es: Volumen del cilindro= A. base * altura= PI*Z*Z*A. ¿No es ingenioso?"*

Para los alumnos de 4º de Bachillerato, en el tema de Funciones tienen que estudiar las formas cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$*. Para que sepan la orientación de la parábola a la hora de representarla, les puedes decir lo siguiente:*

> *"El parámetro a es el que manda en la función. ¿Y qué ocurriría si a "a" le pasara algo negativo? Los alumnos responderán que se pondrá triste. ¿Y si le ocurriera algo positivo? Los alumnos responderán que se pondrá contenta."*

a>0 *a<0*



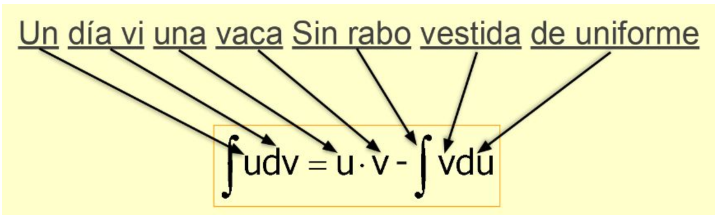
Para los alumnos de 1º de Bachillerato, el tema de Trigonometría les trae por el camino de la amargura, ya que es un tema plagado de fórmulas un poco *liosas para ellos. Por ello, puedes usar la siguiente regla mnemotécnica para que se aprendan la fórmula de las principales identidades trigonométricas, en función del ángulo y los lados de un triángulo rectángulo.*

Puedes pedirles a los alumnos que se aprendan la frase: "SOH CAH TOA".

SOH: $Seno = \frac{Opuesto}{Hipotenusa}$ *, CAH:* $Coseno = \frac{Adyacente}{Hipotenusa}$ *, TOA:* $Tangente = \frac{Opuesto}{Adyacente}$

Y finalmente para los alumnos de 2º de Bachillerato, en el tema de Integración, en concreto integración por partes. Puedes enseñarles varias reglas mnemotécnicas.

La primera sirve para aprenderse la fórmula.



Y la segunda, es la regla ALPES. Sirve para saber el orden que deben tomar para elegir a qué función llamar u en la fórmula anterior.

Regla **ALPES**:
1.A: funciones Arco.
2.L: Logaritmos.
3.P: Potencias de exponente numérico.
4.E: Exponenciales.
5.S: Senos y Cosenos.

"Bueno, creo que con esto tienes suficiente para empezar", le dijo Dolores. El color rojizo había vuelto a cara del alumno, estaba mucho más calmado y confiado tras escuchar todos sus consejos. "No te preocupes seguro que lo harás bien", le dijo la docente. Acto seguido ambos se levantaron abandonando la sala. Fue el punto de partida de una experiencia que aquel alumno jamás olvidará.

Aportaciones a la ciencia

María Dolores es una mujer que ha dedicado toda su vida a la docencia como profesora de matemáticas. Cabe resaltar el papel que realiza esta mujer a diario, no solo inculcando contenidos matemáticos en alumnos de diversos cursos y edades, sino aplicando diversas metodologías y renovando su didáctica con ejemplos actualizados, buscando captar la atención y motivación del alumno.

Es de vital importancia para la difusión de actividades matemáticas en la ciudad de Arnedo y sus alrededores, ya que está involucrada en distintos proyectos de diversa índole que permiten, no solo la participación del alumnado, sino también la participación ciudadana.

Actualmente es jefa del departamento de Matemáticas del IES Celso Díaz de Arnedo, siendo uno de los más importantes y que mejor funciona del centro, todo gracias a su dirección. Es una profesora muy querida por su inmensa vocación y facilidad para que sus alumnos mejoren en esta materia.

Observación del problema

El problema: ”El chico de prácticas”, no es una actividad dirigida a un curso de secundaria en especial, pero podemos utilizarlo como material recreativo en una clase de 2º de Bachillerato, ya que disponen de los conocimientos suficientes para seguir el problema al completo. En los demás cursos podemos enseñar simplemente los trucos correspondientes a su nivel. Sobre todo sirve como herramienta didáctica para un docente de Matemáticas.

Otros ámbitos

Como se trata de una profesora de Secundaria y Bachillerato, puede ser protagonista de cualquier problema para cualquier unidad didáctica.

Hay otras reglas y trucos matemáticos que pueden usarse. En el Anexo III aparecen algunos otros.

Conclusión

Me aventuraría a decir que M.ª Dolores Zapata es una de las mejores profesoras de matemáticas de secundaria de La Rioja hoy en día. Su pasión, esfuerzo y constancia por la enseñanza de las matemáticas, sirve de inspiración para alumnos que quieren dedicarse a la docencia, no sólo de matemáticas, sino también de otras ramas. Por ello, he decidido dedicarle un apartado de mi trabajo a modo de homenaje, y así agradecerle la oportunidad que me brindó al permitirme realizar las prácticas junto a ella.

La elección de esta mujer matemática dentro del presente trabajo, nos ayuda a revalorizar la importancia del papel del profesor en la actualidad, no solo como un mero transmisor del conocimiento, sino como un factor influyente en la creación de valores y en la formación de la personalidad del alumno.

9.2.11. *Otras mujeres matemáticas*

A continuación se muestra un listado con los nombres y épocas de mujeres que se han dedicado a las matemáticas, sobre las que podemos inspirarnos para la realización de problemas contextualizados.

1. Damo (s.VI a.C.)
2. Myia (s.VI a.C.)
3. Fintis (s.VI a.C.)
4. Melisa (s.VI a.C.)
5. Tymicha (s.VI a.C.)
6. Aglaonice de Tesalia (s. V a.C.)
7. Ana Comnena (1083 - 1148)
8. Hildegarda de Bingen (1098 - 1179)
9. María di Novella (s. XIII)
10. Navojka (s. XV)
11. Emilie Breteuil (1706 - 1749)
12. Laura Bassi (1711 - 1778)
13. Caroline Herschel (1750 - 1848)
14. Mary Somerville (1780 - 1872)
15. Charlotte Angas Scott (1858 - 1931)
16. Grace Young (1868 - 1944)
17. Sofía Alexandrovna Neimark (1896-1966)
18. Mary Lucy Cartwright (1900-1998)
19. Nina Karlovna (1901-1961)
20. Grace Murray (1906-1992)
21. Emma Castelnuovo (1914-2014)
22. Julia Robinson (1919-1985)
23. Griselda Pascual (1926-2001)
24. María Wonenburger (1927-2014)
25. Argelia Vélez Rodríguez (1936-)
26. Edna Paisano (1948-)
27. Fan Cheng (1949-)
28. Teresa Riera (1950-)
29. Maryam Mirzakhani (1977-2017)
30. Clara Jiménez Gestal (Universidad de la Rioja) (1970-)
31. Cualquier profesora de matemáticas (universidad, instituto, colegio, *etc)*.
32. Cualquier alumna de matemáticas.

9.3. Anexo III: Solucionario

9.3.1. Teano

A- Problema 1: *"El templo de Teano"*

PARTE 1:

Longitud de cada lado del templo **8 metros** (ver Figura 19).

Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿De qué figura geométrica plana se trata? **Hexágono regular.**

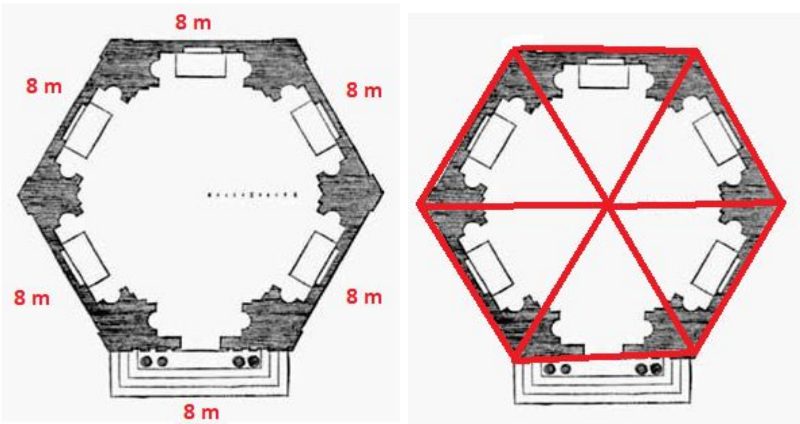


Figura 19: A la derecha el templo de Hipatia con las medidas de los lados y a la izquierda la figura triangulada.

2. Realizar triangulación (ver Figura 19).
3. ¿En cuántas partes (triángulos) queda dividida la figura? **8 partes iguales.**
4. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de cada triángulo? **60º.**
5. ¿Qué tipo de triángulo se trata? Clasifícalo según sus lados y ángulos. **Según sus lados es un triángulo equilátero (todos sus lados y ángulos iguales) y según sus ángulos es un triángulo acutángulo.**
    - **Conclusión:** Si dividimos un hexágono regular en triángulos trazando líneas desde el centro hasta cada uno de los vértices, obtenemos **6** triángulos **equiláteros.**
6. ¿Cuánto miden cada uno de los trazos desde el centro hasta el vértice? **8 metros**
7. Calcula:.
    - Perímetro del templo **48 metros**
    - Apotema del templo **6.92 metros**

- Área del templo **166.08 metros cuadrados**

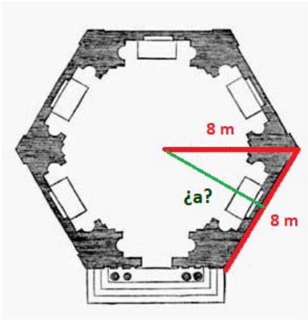


Figura 20: Templo de Hipatia con sus medidas.

PARTE 2:

1. ¿Con qué figuras geométricas planas regulares se puede rellenar el suelo del templo sin que quede ningún hueco? **Triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.**

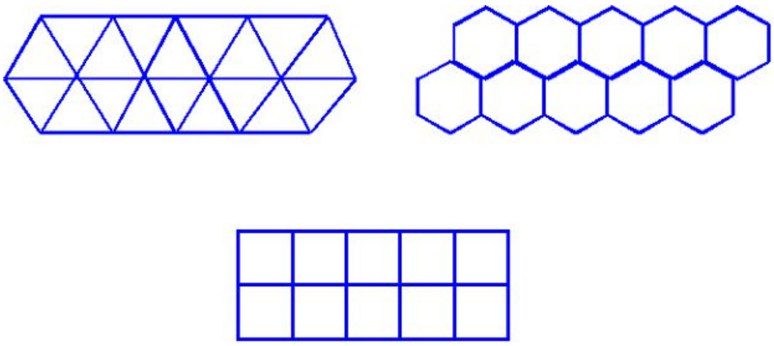


Figura 21: Teselación del plano con polígonos geométricas regulares.

2. Si al final se decide por utilizar baldosas en forma de hexágonos regulares cuya área es de 44 cm cuadrados. Sabiendo el área del suelo del templo, calcula cuántas baldosas tiene que utilizar. **Sol. 378 baldosas aprox.**
3. Teselación del plano, actividad libre.

<u>**B-Problema 2: *"La edad de Teano"***</u>

Para resolver el problema simplemente hay que resolver el siguiente sistema

$$e = 4 \cdot a$$

$$e = 1 + 2 + 4 + a + 2a$$

Donde e es la edad de Teano y a el número de admiradores.

La solución es:

$$e = 28 \quad a = 7$$

9.3.2. *Hipatia*

A-Problema 1: “El numerograma de Hipatia”

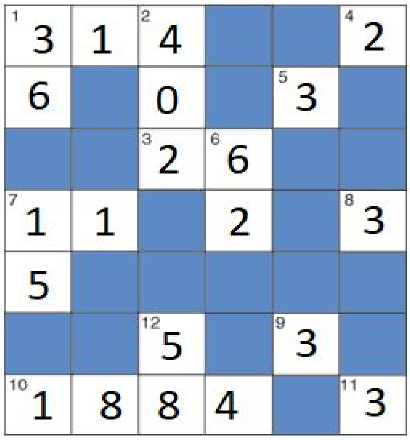


Figura 22: Numerograma de Hipatia resuelto..

B-Problema 2: “El astrolabio de Hipatia”

1. ¿Qué figuras geométricas observas en el dibujo? **Hay tres puntos (A,B y C), tres circunferencias y 2 semirrectas.**
2. ¿Cuál es la posición relativa entre las tres circunferencias?

   Las circunferencias negra y azul son concéntricas, con centro en el punto C.

   La circunferencia azul es interior a la circunferencia negra,

   La circunferencia roja es interior a las circunferencias azul y negra.
3. ¿Cuál es la posición relativa de los puntos respecto a las circunferencias?

   El punto A es exterior a las tres circunferencias.

   El punto B pertenece a la circunferencia negra, y es exterior a la circunferencia azul y roja.

   El punto C es interior a las tres circunferencias, y a su vez es el centro de la circunferencia negra y azul.

¿Qué representan las agujas del astrolabio?

Una de ellas (segmento verde) representa el radio de la circunferencia negra.

Ambas agujas (segmento violeta) representa el diámetro de la circunferencia negra.

Se puede observar que el segmento violeta forma una cuerda y su correspondiente arco en la circunferencia roja.

Ambos segmentos contienen el punto C.

4. Si prolongamos el segmento violeta hasta el infinito y formamos una recta, ¿cuál será su posición relativa respecto a las circunferencias?

    Es secante a las tres circunferencias las corta en dos puntos distintos.

9.3.3. María Gaetana Agnesi

A-Problema 1: "*La Bruja*" de Agnesi.

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

3º de la ESO

1. Dominio de la función. **Todos los reales R.**
2. Recorrido de la función. **(0, 2] (Se aproxima a y=0 pero nunca lo alcanza, por lo tanto hay una asíntota horizontal en y=0)**
3. ¿Es continua en todo su dominio? **Si**
4. Monotonía: Crecimiento y decrecimiento.
   a. **-Creciente: (-∞, 0)**
   b. **-Decreciente (0,+∞)**
5. Máximos y mínimos relativos. **Máximo relativo en x=0 cuyo valor es el punto P(0,2).**
6. Máximos y mínimos absolutos. **Máximo absoluto en y=2.**
7. Simetría. **Par, puesto que se cumple que f(x)=f(-x).**
8. Periodicidad. **No.**

Conclusión: ¿Qué indica el parámetro *a* de la función? **El valor máximo que alcanza la función.**

1º o 2º de Bachillerato

1. Dominio. **Todos los reales R.**
2. Primera y segunda derivada.

$$y' = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} \quad y'' = \frac{48x^2-64}{(x^2+4)^3}$$

3. Continuidad: Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. **Es continua en todo R.**

   Asíntotas verticales y oblicuas no tiene. Asíntota horizontal doble en y=0.
4. Monotonía (crecimiento y decrecimiento): estudio del signo de la primera derivada.

   Creciente en el intervalo (-∞, 0), y decreciente en el intervalo (0,+∞)

5. Extremos relativos (máximos y mínimos): estudio del signo de la segunda derivada.

   Hay un máximo relativo en x=0 cuyo valor es el punto (0,2)

6. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
   a. **Es Cóncava (-1.54, 1.54)**
   b. **Es Convexa (-∞, -1.54) ∪(1.54, ∞)**
   c. **Puntos de inflexión (1.54, 1.5), (-1.54, 1.5)**
7. Cortes con los ejes. **Con el eje X no tiene, con el eje Y el punto (0,2)**
8. Simetría. **Es par, puesto que se cumple que f(x)=f(-x).**
9. Periodicidad. **No tiene**
10. Tabla de valores.
11. Representación gráfica.

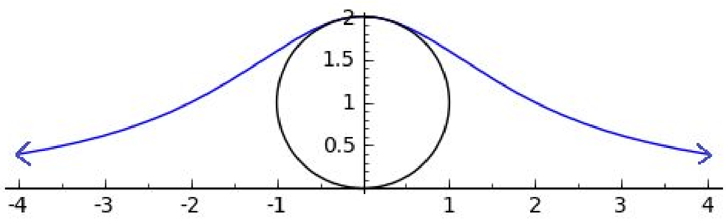


Figura 23: La curva de Agnesi.

12. Recorrido. **Rec f = (0, 2]**

- ¿Que representa la función? **Una curva cúbica muy importante denominada la "Bruja de Agnesi".**

B-Problema 2: *"La curva de Agnesi como lugar geométrico"*

Nota: Para este ejercicio se puede utilizar GeoGebra.

La demostración es muy sencilla de seguir. Siguiendo los pasos debemos dibujar lo que aparece en la Figura 24.

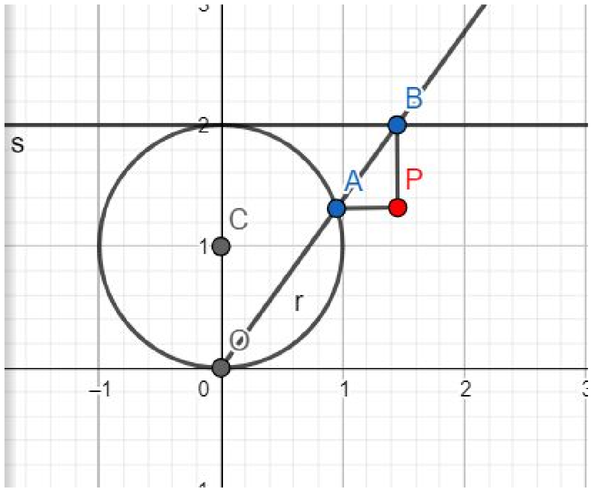


Figura 24: Construcción del lugar geométrico de la Curva de Agnesi.

Tenemos las siguientes ecuaciones:

- Recta *s:* $y = 2$
- Recta *r:* $y = mx$, esta recta es variable se va moviendo alrededor de la circunferencia, por lo que la dejamos en función del valor de *m.*
- La circunferencia de centro en C(0,1) y radio 1, tiene como ecuación:

$$C1 : \ x^2 + (y-1)^2 = \ 1 \Rightarrow \ x^2 + y^2 - 2y = 0$$

A continuación vamos a calcular las coordenadas del punto A, que es la intersección de la recta *r* con la circunferencia C1. Por tanto tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ C1 : \ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene dos soluciones

$x = 0$, ésta la descartamos porque se corresponde con el punto O(0,0)

$x = \frac{2m}{1+m^2}$

Por tanto las coordenadas de A son $A\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{2m^2}{1+m^2}\right)$

Para calcular las coordenadas del punto B, que es el punto de intersección entre las rectas *r* y *s.* Debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = 2 \end{cases}$$

El sistema tiene como solución $x = \frac{2}{m}$.

Por tanto las coordenadas del punto B son B($\frac{2}{m}$, 2).

El punto P correspondiente al lugar geométrico tiene la misma coordenada x que el punto B y la misma coordenada y que el punto A. De ahí deducimos que

$$P\left(\frac{2}{m} ,\ \frac{2m^2}{1+m^2} \right)$$

Por tanto, con una pequeña transformación obtenemos la curva de Agnesi.

$$y = \frac{2m^2}{1+m^2} = \frac{2(\frac{2}{x})^2}{1+(\frac{2}{x})^2} = \frac{8}{x^2+4}$$

9.3.4. Sophie Germain

<u>A-Problema: *“Construye el mundo con los números”*</u>

1. Los números Naturales **(N)={0,1,2,3,4….}**

   Dadas las siguientes ecuaciones, Sophie debe resolverlas utilizando exclusivamente números naturales.

   a) $x+10=20$

   b) $x+5=8$

   c) $x+7=7$

   d) $x+11=5$

   ¿Ha sido posible resolver las ecuaciones usando solo números naturales? **No** ¿Cuál no se ha podido resolver con números naturales? **d**

2. Los números Enteros **(Z)= {...-2,-1,0,1,2…}**

   ¿Serías capaz de resolver las siguientes ecuaciones utilizando números enteros?

   a) $x+20=27$

   b) $x-7=4$

   c) $x+3=0$

   d) $x+14=0$

   ¿Cuáles de las anteriores preguntas no se han podido resolver usando números naturales? **c,d**

3. Los números Racionales **(Q)**.

   ¿Serías capaz de resolver ahora las siguientes ecuaciones utilizando números racionales?

   a) $-6x=100$

   b) $3x=30$

   c) $4x=25$

   d) $3x=81$

   ¿Cuáles de las anteriores preguntas no se hubieran podido resolver con los números enteros Z? **a, c.**

   Clasificación de los números racionales:

- Número entero: ocurre cuando el numerador es **múltiplo** del denominador.
- Decimal exacto: Tiene un número **finito** de cifras decimales. Ocurre cuando el denominador de la fracción es múltiplo de **2, 5 o mezcla**.
- Periódico puro: Tiene un número **infinito** de cifras decimales que se repiten, a esto se le denomina periodo. Ocurre cuando el denominador de la fracción es múltiplo de **otros factores que no sean 2 o 5**.
- Periódico mixto: Tiene un número finito de cifras decimales que no se repiten, a esto se le denomina **anteperiodo**; y un número **infinito** de cifras decimales que se repiten, a esto se le denomina periodo. Ocurre cuando el denominador de la fracción es múltiplo de **otros factores que no sean 2 o 5.**

4. Los números Irracionales **(I)**.

- ¿Podrías dar un ejemplo a Sophie de algún número irracional famoso?

Número pi, número de oro, número e.

- ¿En qué ocasiones cuando estabas estudiando te has encontrado estos números tan especiales? **El número pi, en geometría, el número e en el uso de logaritmos y el número de oro en la serie de Fibonacci y en la naturaleza.**
- Muchas raíces también son números irracionales. Y se pueden representar en la recta Real. Con ayuda de regla y compás representa gráficamente los radicales de los 10 primeros números naturales. ¿Cuáles de ellos son números racionales? **Raíz de 4 y de 9**

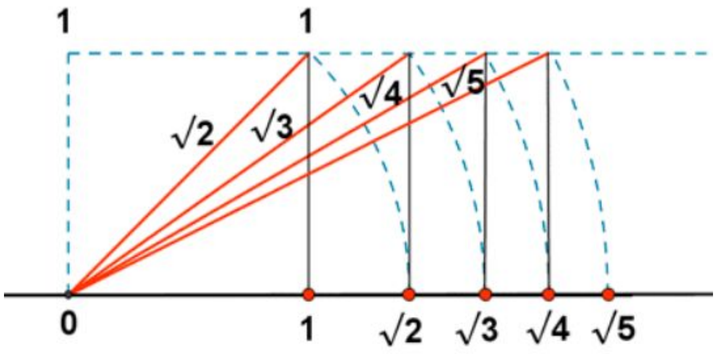


Figura 25: Representación gráfica de los radicales del 1 al 5 con regla y compás.

5. Los números Reales **(R)**.

Conclusión:

La parte $D = b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación de segundo grado, y cumple que si

- $D > 0$ la ecuación tiene dos soluciones, dos puntos de corte con el eje X.
- $D = 0$ la ecuación tiene una solución doble, un punto de corte con el eje X.
- $D < 0$ la ecuación no tiene solución real, ningún punto de corte con el eje X.

Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 - 16 = 0$
b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
c) $x^2 - 2 = 0$
d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

¿Cuáles de ellas no tienen solución en Q? **c y d** ¿Entonces, a qué conjunto pertenecen dichas ecuaciones? **Las soluciones de c a los Irracionales, y las de d a los Complejos.**

Conclusión:

El conjunto de los números Reales está formado por los **racionales** y los **irracionales.** Con estos siempre podemos sumar, restar, dividir, multiplicar para conseguir un número real. Los números reales pueden representarse gráficamente en la **Recta real.**

¿Qué pasa cuando el discriminante de la ecuación de segundo grado es negativo? **Esto mejor lo dejamos para el curso que viene, son los números Complejos.**

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\vert\ \vert$	$\mathbb{R}$
3	X	X	X		X
-6/2		X	X		X
$\sqrt[3]{-64}$		X	X		X
π				X	X
3/2			X		X
$\sqrt{5}$				X	X
....					

Tabla 12: Solución de la clasificación numérica de Sophie.

9.3.5. Ada Lovelace

A-Problema 1: *“El bingo de las tarjetas perforadas”*

Un ejemplo de las operaciones para 2º de la ESO es la siguiente Tabla 13.

1	3/6 + 1/2	**24**	$5\cdot4+2\cdot2$	**47**	$100 : 2-3$	**70**	$123-53$
2	4·(½)	**25**	$\sqrt{625}$	**48**	$24\cdot2$	71	$20\cdot3+11$
3	$\sqrt{27}\cdot 3^{-1/2}$	**26**	5^2+5^0	**49**	7^2	**72**	$3^2\cdot2^3$
4	½ · 8	**27**	3^3	**50**	$1+7^2$	**73**	$9\cdot8+1$
5	$60/12$	**28**	$7\cdot4$	**51**	media centena más 1	**74**	2^6+10
6	5^0+5	**29**	$3\cdot10-1$	**52**	$13\cdot4$	**75**	$100/2 + 100/4$
7	14 medios	**30**	3% *de* 1000	**53**	$9\cdot7-10$	**76**	$89-13$
8	$2^4\cdot2^{-1}$	**31**	$1+10\cdot3$	**54**	$7\cdot9 : 7^0$	**77**	7^2+28
9	$6 : 2(1+2)$	**32**	$8\cdot4$	**55**	$70-14 : 2$	**78**	$14\cdot4+2\cdot11$
10	$\sqrt{100}$	**33**	$66/3 + 11$	**56**	$2^{3\cdot7}$	**79**	$100-7\cdot3$
11	$22/2$	**34**	$8\cdot4+2$	**57**	$70-13$	**80**	$2^4\cdot5$
12	$2^2\cdot3$	**35**	$7\cdot(4+1)$	**58**	$6\cdot10-2$	**81**	$3^4\cdot3^0$
13	El 5º número primo	**36**	6^2	**59**	$3+8\cdot7$	**82**	$41\cdot2$
14	$28\cdot2 : 4$	**37**	$9\cdot4+1$	**60**	$1800 : 3$	**83**	$101-18$
15	$5+5\cdot2$	**38**	$60 : 2+8$	**61**	$10\cdot(3\%$ *de* $30)+1$	**84**	$7\cdot3\cdot2^2$
16	2^4	**39**	$\sqrt{1600}-1$	**62**	$31\cdot2$	**85**	$18\cdot5-5$
17	$\sqrt{17^2}$	**40**	$\sqrt{1600}$	**63**	$3^2\cdot7$	**86**	$5\cdot17+1$
18	$40 : 2-4 : 2$	**41**	$2^3\cdot5+1$	**64**	2^6	**87**	$8\cdot11-1$
19	$22-6 : 2$	**42**	$6\cdot7$	**65**	2^6+1	**88**	$176/2$
20	la mitad de la mitad de 80	**43**	$40 + 6 : 2$	**66**	$132 : 2$	**89**	10^2-11
21	$7\cdot3$	**44**	$11\cdot2^2$	**67**	$57-(-10)$	**90**	$100-(10\%$ *de* $100)$
22	2^4+6	**45**	$3^2\cdot5$	**68**	$-13\cdot(-4)+2^4$		
23	$5\cdot4+6 : 2$	**46**	$60-14$	**69**	$3\cdot23$		

Tabla 13: Operaciones del Bingo de Tarjetas perforadas.

B-Problema 2: "*El mensaje escondido*"

En la Tabla 14 aparecen las soluciones a las pistas del enigma.

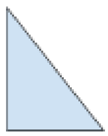
Pistas			
A: $3\%\ de\ 30$	**9**	**N:** $f(x) = x^2 - 4,\ f(2)$	**0**
B: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{7}{5}$	**1**	**O:** $3^0 \times 3^2{\times}Z$	**3**
C: $x + 6 =- 2$	**-8**	**P:** $100/(5{\times}E)$	**4**
D: $7^2/(6 + B)$	**7**	**Q:** $\frac{7}{2}$ de la mitad de 8	**14**
E: $A - 2{\times}2B$	**5**	**R:** R	**R**
F: $(3^2 - 2^3){\times}11$	**11**	**S:** $- x^2 =- 900$	**30**
G: $Z{\times}(-3)^3$	**-9**	**T:** $A + B - Q - 1$	**-5**
H: $G + 3B$	**-6**	**U:** $W/(V - 1)$	**10**
I: $3.1415....$	π	**V:** $\frac{2}{3} de\ 9$	**6**
J: Triángulo rectángulo hipotenusa = 10 cm cateto a= 6 cm. cateto b=¿? 	**8**	**W:** Y/X	**50**
K: $\sqrt{225}$	**15**	**X:** $x\%\ de\ 250 = 100$	**40**
L: $x^2 = 144$	**12**	**Y:** $20\%\ de\ 1000$	**200**
M: $-(3x - 5) =- B$	**2**	**Z:** 3^{-1}	$\frac{1}{3}$

Tabla 14: Pistas resueltas del Enigma de Ada.

Solución: El mensaje oculto dice lo siguiente

ADA LOVELACE, LA PRIMERA MUJER INFORMÁTICA DE LA HISTORIA.

9.3.5.1. El juego de Ada

Fue un juego inventado por Ada Lovelace. En una de las cartas que le escribo a su colega Babbage, de decía:

"He estado observando e investigando sobre el juego y ya soy capaz de terminarlo correctamente, pero no conozco si el problema admite alguna

fórmula matemática que permita resolverlo. Estoy convencida de que es así. Imagino que debe ser un principio definido, una composición de propiedades numéricas y geométricas de las que dependa la solución, que pueda ser expresada en lenguaje simbólico. Pienso que depende mucho de la primera ficha eliminada.”

El juego es una especie de solitario basado en un tablero octogonal como el que aparece en la Figura 26. Debemos colocar una ficha encima de cada casilla numerada del 1 al 37 (un total de 37 fichas).

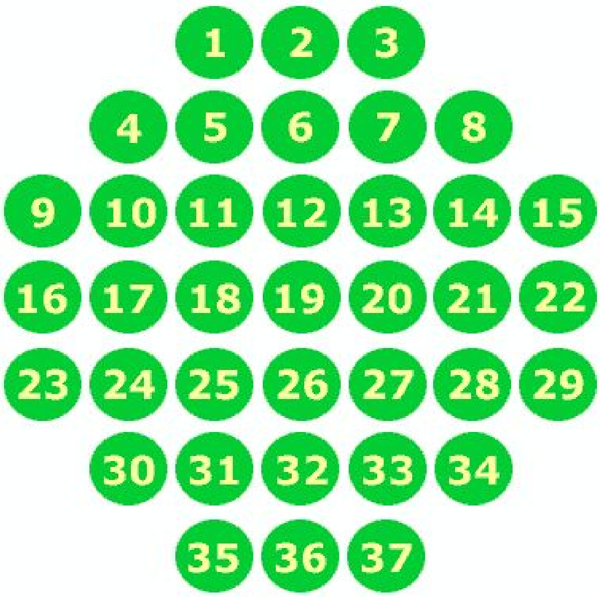


Figura 26: Tablero para jugar al Juego de Ada.

Modo de juego:

1. Se quita una ficha cualquiera del tablero.
2. Una ficha puede pasar a ocupar ese hueco saltando en vertical u horizontal (nunca en diagonal) sobre una ficha, que acto seguida queda *comida* y retirada del tablero. Por ejemplo: si quitamos la ficha 26, podemos mover la 12 (comiéndonos a la 19), la 24 (comiéndonos a la 25), la 36 (comiéndonos a la 32) y la 28 (comiéndonos a la 27).
3. La ficha sólo puede moverse sobre el tablero, saltando sobre otra ficha, con los movimientos explicados en el punto anterior.
4. El juego consiste en dejar una única ficha sobre el tablero.

9.3.6. *Florence Nightingale*

<u>A-Problema 1: *"La estadística de la guerra"*</u>

- Determina: la población, la muestra, el individuo y la variable, a estudiar.
  - **Población: todas las mujeres afectadas por la guerra.**
  - **Muestra: el conjunto de mujeres afectadas que han acudido al hospital en el que trabaja Florence**
  - **Individuo: cada una de las mujeres afectadas del hospital.**
  - **Variable: la edad de las mujeres.**
- ¿De qué tipo es la variable estadística que Florence está estudiando? **La edad es una variable cuantitativa discreta.**
- ¿Cuál es el tamaño de la muestra? ¿Es significativa? Razona tu respuesta. **El tamaño de la muestra es 1000 personas. Teniendo en cuenta de que la guerra de Crimea tuvo alrededor de 700000 bajas en ambos bandos, la cantidad de personas no es muy significativa.**

Análisis estadístico:

1. Tabla de frecuencias.

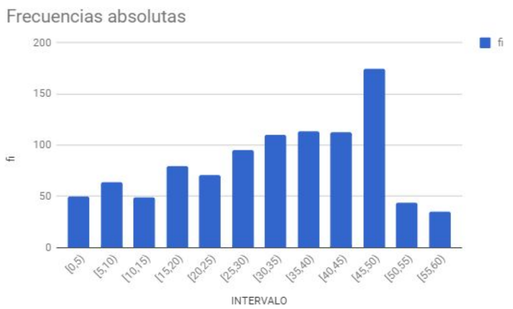
INTERVALO	Xi	fi	Fi	hi	Hi	Grados	%
[0,5)	2,5	50	50	0,05	0,05	18	5
[5,10)	7,5	64	114	0,064	0,114	23,04	6,4
[10,15)	12,5	49	163	0,049	0,163	17,64	4,9
[15,20)	17,5	80	243	0,08	0,243	28,8	8
[20,25)	22,5	71	314	0,071	0,314	25,56	7,1
[25,30)	27,5	95	409	0,095	0,409	34,2	9,5
[30,35)	32,5	110	519	0,11	0,519	39,6	11
[35,40)	37,5	114	633	0,114	0,633	41,04	11,4
[40,45)	42,5	113	746	0,113	0,746	40,68	11,3
[45,50)	47,5	175	921	0,175	0,921	63	17,5
[50,55)	52,5	44	965	0,044	0,965	15,84	4,4
[55,60)	57,5	35	1000	0,035	1	12,6	3,5
TOTAL		1000		1		360	100

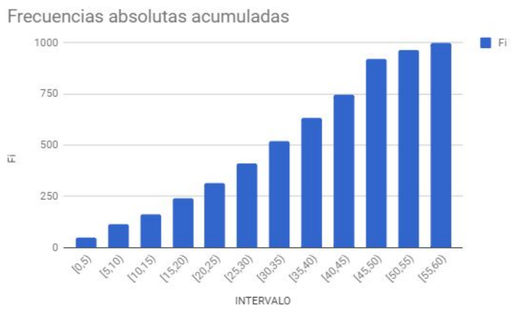
Tabla 15: Tabla de frecuencias.

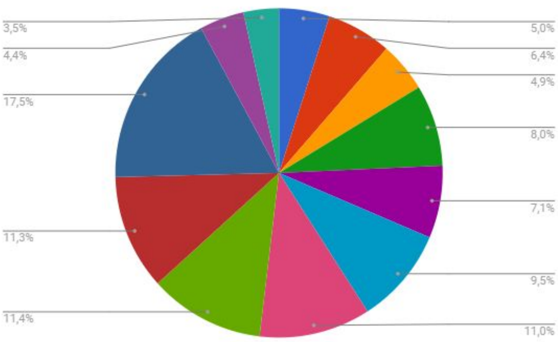
2. Medidas de centralización.
   - **Media: 32.115**
   - **Moda: intervalo modal [45,50). Mo=46.33**
   - **Mediana: intervalo [30, 35). Me=34.13**
3. Medidas de dispersión.
   - **Rango: 60**

- **Desviación media:33.47**
- **Varianza: 224.96**
- **Desviación típica: 15**
- **Coeficiente de variación:0.4667 → 46.67%**

4. Cuartiles.
   - **Q1: Intervalo [20, 25) → 34.13**
   - **Q2: corresponde con la Mediana Me.**
   - **Q3: Intervalo [45, 50) → 45.11**
5. Gráficos.







B-Problema 2: *“La probabilidad de la guerra”*

PARTE 1

a) Realiza la tabla de contingencia.

	SOBREVIVIR	FALLECER	
NIÑAS	12	**36**	48
ADULTAS	**24**	**48**	**72**
	36	**84**	120

Tabla 16: Tabla de contingencia.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña y que haya sobrevivido?

P(N U S)= 0.6

c) ¿Cuál es la probabilidad de sobrevivir sabiendo que es niña?

P(S/N)= 0.25

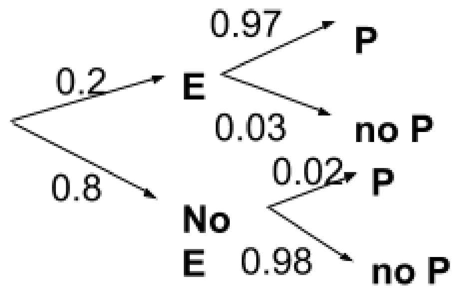
d) ¿Cuál es la probabilidad de que sobreviva? **P(S)=0.2**

e) ¿Son independientes los sucesos sobrevivir y ser niña? **P(S) P(I)= 0.12 mientras que P(S∩N)=12/120=0.1 Como son distintos los dos sucesos no son independientes.**

PARTE 2

a) Realiza un diagrama de árbol que te ayude a entender la situación.

Llamamos E al suceso de estar enfermo y P al suceso de dar positivo a los análisis.



b) ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente de positivo en los análisis y padezca la enfermedad?

$$P(Enfermo\ y\ Positiva) = P(E \cap P) = 0.2 \cdot 0.97 = 0.194$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de dar positivo en los análisis? **Teorema de la probabilidad total**

$$P(Positiva) = P(P) = 0.194 + 0.016 = 0.21$$

d) Si sabemos que el paciente ha dado positivo en los análisis, ¿cuál es la probabilidad de que el paciente esté enfermo? **Teorema de Bayes de la probabilidad condicionada**

$$P(Enfermo/Positiva) = \frac{P(Ei)\,P(P/Ei)}{P(P)} = \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{0.194}{0.21} = 0.9238$$

PARTE 3

a) Si disponemos de 10 camillas, de las cuales 2 de ellas son dobles y una es triple. ¿De cuántas maneras podemos distribuir a los heridos?

Sol.: $P_6 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_3 = 17280\, formas\ posibles$

b) Tras mover unos hilos, Florence ha conseguido una camilla para cada uno de los 10 pacientes. Si se quieren organizar las camillas entre los tres pisos que tiene el hospital. ¿De cuántas formas distintas se pueden agrupar?

Sol.: $V_{10,3} = 720\, formas\ posibles$

c) En el hospital hay escasez de batas. Hay 10 iguales y 10 de distintos colores. Si elegimos 5 iguales y 5 de colores distintos. ¿De cuántas formas lo podemos hacer? ¿Cuál es la probabilidad de que las 5 batas de colores las coloquemos en una misma habitación de 5 pacientes?

Sol.: $C_{10,5} . V_{10,5} = 252 \cdot 30240 = 30240\, formas\ posibles$

$$P(5\ batas) = \frac{P_5}{30240} = \frac{120}{30240} = \frac{1}{252} = 0.0039$$

d) La probabilidad de que un paciente sobreviva al día es del 20%. Calcula la probabilidad de que sobreviva al menos un paciente durante 5 días.

Sol.: $P(al\ menos\ 1) = 01 - P(ninguno) = 1 - (0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8) = 0.67232$

9.3.7. Sofía Kovalevskaya

A-Problema 1: *"Una pesadilla muy matemática"*

- El concepto con el que está relacionado la pesadilla de Sofía es el de asíntota.
- ¿Podrías ayudar a Sofía a seleccionar aquellas figuras que muestren un comportamiento asintótico? **a, b, e, f, g, i.**
- ¿Cuántos tipos de asíntotas existen? **Asíntota vertical, horizontal y oblicua.**
- Clasifica las funciones que presentan comportamiento asintótico según el tipo de asíntotas que presenten.

Asíntota vertical	**a, b, e, f, g, i**
Asíntota horizontal	**a, b, e**
Asíntota oblicua	**f**

- ¿Sabrías deducir que gráfica se corresponde con algún tipo de función famosa que se estudia en matemáticas? **Logaritmo, seno, tangente, parábola, recta e hipérbola.**
- ¿Cuántos tipos de discontinuidad en una función conoces? **Discontinuidad evitable, discontinuidad esencial de 1ª especie de salto finito, discontinuidad esencial de 1ª especie de salto infinito y discontinuidad esencial de 2ª especie.**
- ¿Una asíntota vertical de qué tipo de discontinuidad se trata? **Discontinuidad inevitable de salto infinito.**

4º de la ESO

- ¿Serías capaz de representar la siguiente función y determinar sus características?

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x < -3 \\ 2^{-x} & \text{si } -3 < x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dom f(x) = R-{3}
Rec f(x) = (–∞ , 0) U [1,8]
Monotonía: f↑: (0 , 3); f↓: (–∞ ,0) y f↑↓: (3, +∞)
Continuidad: x=0 Discontinuidad inevitable de salto ∞, y en x=3 hay una discontinuidad evitable
Curvatura: f cóncava: (–∞ , 0) y f convexa (0 , 3)

Cortes: Eje x: No hay Eje y: (0,1)
Simetría: No
Periodicidad: No

<u>1º de Bachillerato de Ciencias</u>

- ¿Serías capaz de determinar: Dominio, Recorrido y estudio de la Continuidad, de las siguientes funciones a través de su expresión analítica haciendo uso de límites?

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$	**HIPÉRBOLA** **Dom f: R-{1}** **Asíntota Vertical: x=1** **Asíntota Horizontal doble en y=0** **Rec f: R-{0}**
b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$	**HIPÉRBOLA** **Dom f: R-{1}** **Asíntota Vertical: x=1** **Asíntota Horizontal doble en y=1** **Rec f: R-{1}**
c) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$	**Dom f: R-{2}** **Asíntota Vertical: x=2** **Asíntota Oblicua en y=x+2, y=-x-2** **Rec f:**$(-\infty, \ -0.89) \cup (8.89, \infty)$

<u>B-Problema 2: *“Los anillos de Saturno”*</u>

PARTE 1: Ecuación de la circunferencia.

- Calcula las ecuaciones general y ordinaria de los anillos de Saturno. Ver las representaciones gráficas en la Figura 27.
    - **Anillo A:** $x^2 + y^2 = 9$
    - **Anillo B:** $x^2 + y^2 = 18$
    - **Anillo C:** $(x+1)^2 + y^2 = 25$
    - **Anillo D:** $x^2 + (y+1)^2 = 8$

- ¿Seguirá manteniendo el Anillo A la misma ecuación? **No** ¿De no ser así, de qué manera ha cambiado? **Hay que tener en cuenta el nuevo centro de la circunferencia.**
    - **Anillo A':** $(x+3)^2+(y-6)^2=9$

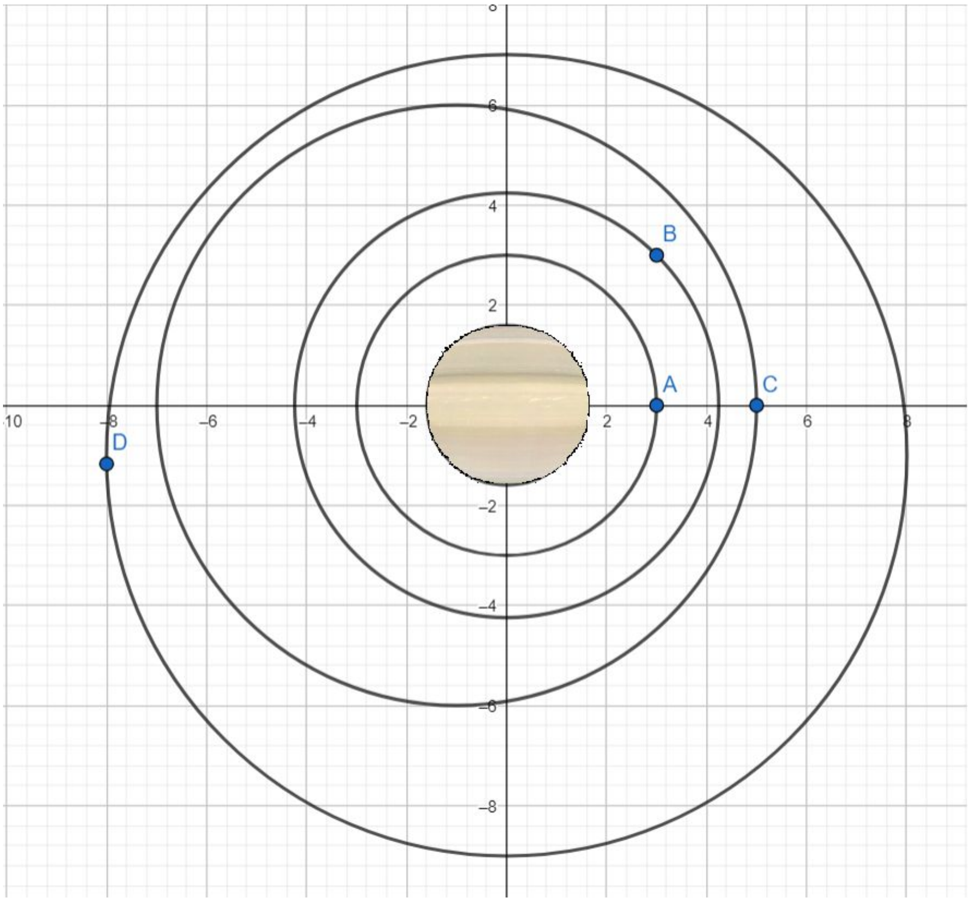


Figura 27: Representación gráfica de los Anillos de Saturno.

Conclusiones:

- La circunferencia es el lugar geométrico en la que todos los puntos P(x,y), están a igual distancia de un **centro C(a,b)**

$$d(P,C)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

- Dado cualquier punto P(x,y) de la circunferencia de centro C(a,b) y radio r. Su ecuación ordinaria es $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
- Si desarrollamos la ecuación ordinaria llegamos a la ecuación general que es de la forma: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ donde,

$A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-r^2$

PARTE 2: Ángulos notables.

En la Tabla 17 aparecen los ángulos notables , relativos a las posiciones de Saturno y sus razones trigonométricas.

ÁNGULOS NOTABLES								
AÑO	**RADIANES**	**ÁNGULOS**	**SENO**	**COSENO**	**TANGENTE**	**COSECANTE**	**SECANTE**	**COTANGENTE**
1869	0	0º	0	1	0	INDEFINIDO	1	IND
1870	$\frac{\pi}{6}$	30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
1871	$\frac{\pi}{4}$	45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
1872	$\frac{\pi}{3}$	60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1873	$\frac{\pi}{2}$	90º	1	0	IND	1	IND	0
1878	π	180º	0	-1	0	IND	-1	IND
1883	$\frac{3\pi}{2}$	270º	-1	0	IND	-1	IND	0
1888	2π	360º	0	1	0	IND	1	IND

Tabla 17: Ángulos notables (posiciones de Saturno) y sus razones trigonométricas.

Conclusiones:

- La identidad más famosa de la trigonometría es $sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2 = 1$
- Los ángulos complementarios son aquellos suman **90º.**
- Los ángulos suplementarios son aquellos suman **180º.**
- Las razones trigonométricas de los ángulos complementarios se relacionan de la siguiente manera:
    - $sen(\theta) = cos(90 - \theta)$
    - $cos(\theta) = sen(90 - \theta)$
    - $tan(\theta) = cotan(90 - \theta)$
    - $cosec(\theta) = sec(90 - \theta)$
    - $sec(\theta) = cosec(90 - \theta)$
    - $cotan(\theta) = tan(90 - \theta)$

PARTE 3: Distancia de la Tierra a Saturno.

La distancia entre la Tierra y el Sol es de 1 UA[22] (149 597 870 700 m).

[22] UA: es una unidad de longitud igual, por definición, a 149 597 870 700 m, que equivale aproximadamente a la distancia media entre el planeta Tierra y el Sol.

Calculamos los ángulos del triángulo que se forma entre el Sol, la Tierra y Saturno, tal y como aparece en la Figura 28.

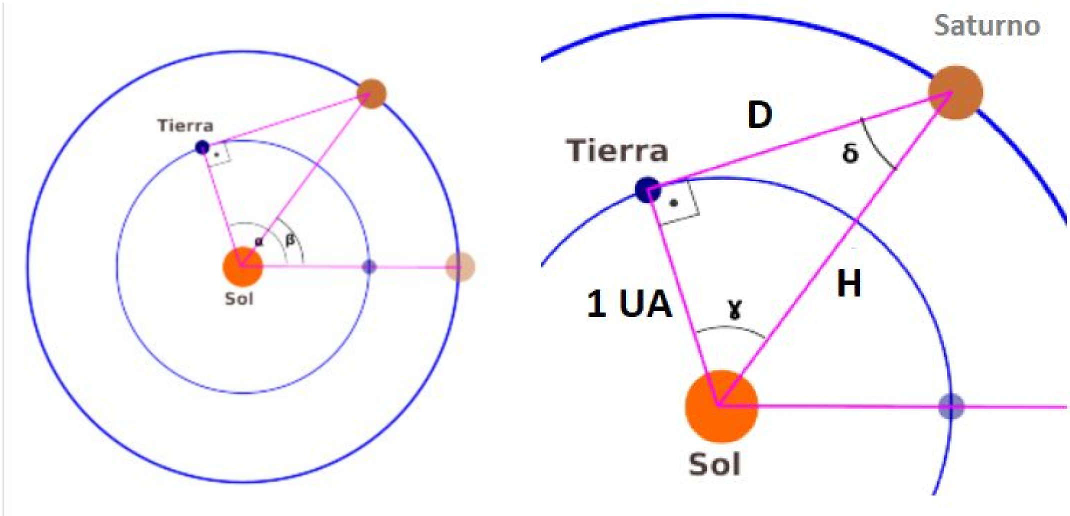


Figura 28: Disposición trigonométrica del Sol, la Tierra y Saturno.

90º mide el ángulo Sol-Tierra-Saturno.

$\gamma = \alpha - \beta = 120 - 37 = 83^{o}$ mide el ángulo Saturno-Sol-Tierra.

$\delta = 90 - \gamma = 90 - 83 = 7^{o}$ mide el ángulo Sol-Saturno-Tierra.

Ahora con un sencillo cálculo trigonométrico vamos a ser capaces de calcular la distancia entre la Tierra y Saturno.

$$cos(\gamma) = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{1}{H}$$

De ahí despejamos el valor de la hipotenusa, que es el valor de la distancia entre Saturno y el Sol.

$$H = \frac{1}{cos(\gamma)} = \frac{1}{cos(83)} = 8,20\ UA$$

Finalmente sustituyendo en la fórmula del seno, obtenemos la distancia entre la Tierra y Saturno.

$$sen(\gamma) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{D}{H}$$

$$D = H\ sen(\gamma) = 8.20\ sen(83) = 8.14\ UA$$

La distancia entre la Tierra y Saturno es de 8.14 UA.

9.3.8. Emmy Noether

A-Problema: *"Enseñando a Einstein"*

Traslaciones

1. ¿Cuál es el vector de traslación que ha seguido el navío para llegar desde Oporto hasta Nueva York? **El vector de translación AB=(-18,-4).**
2. Tras desembarcar en Nueva York, el navío debe continuar su ruta hasta llegar a Sao Paulo. Para ello debe moverse 4 unidades al Este y 5 unidades hacia el Sur. ¿Cuál es el vector de translación en éste caso? **El vector de translación es BC=(4,5)** ¿En qué punto del mapa se encuentra la ciudad de Sao Paulo? **En el punto C=(-4,-3).**

Conclusiones:

- Una translación es el movimiento de una figura en las que todos sus puntos **b) se mueven en la misma dirección y la misma distancia.**
- El resultado que se forma tras una translación es una figura **totalmente idéntica.**
- Da algún ejemplo de la vida cotidiana donde se utilicen las traslaciones. **Durante cualquier movimiento o desplazamiento, andando, coche. El crecimiento de las plantas, *etc.***

Simetrías

1. ¿Serías capaz de dibujar la naranja reflejada en el espejo en el mapa cartesiano a través del eje de ordenadas? Indica los puntos asociados tras realizar la simetría. ¿De qué tipo de simetría se trata? Razona tu respuesta.

   Es una simetría axial respecto al eje de ordenadas x=0, los puntos asociados mantienen la misma coordenada en Y pero opuesta coordenada en X.

   A(-5,7) → A'(5,7), B(-8,6) → B'(8,6), C(-9,4) → C'(9,4), D(-8,1) → D'(8,1), E(-5,0) → E'(5,0).
2. Intenta ahora dibujar la media naranja simétrica respecto al origen de coordenadas. Indica los puntos asociados tras realizar la simetría. ¿De qué tipo de simetría se trata? Razona tu respuesta.

Es una simetría central respecto al origen de coordenadas O(0,0), los puntos asociados tienen coordenadas opuestas.

A(-5,7) → A'(5,-7), B(-8,6) → B'(8,-6), C(-9,4) → C'(9,-4), D(-8,1) → D'(8,-1), E(-5,0) → E'(5,0).

Conclusiones:

- En el ejemplo hemos visto dos tipos de simetrías,
  - Simetría **axial**: también conocida como simetría a través de un eje. Es aquella transformación en la que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P', de manera que el eje sea **mediatriz** del segmento PP'.
  - Simetría **central**: también conocida como simetría a través de un punto O. Es aquella transformación en la que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P', de manera que el punto O sea **el punto medio** del segmento PP'.
  - Simetría **radial**: también conocida como simetría a través de una o varias circunferencias. Es aquella transformación en la que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P', de manera que el centro de la circunferencia C, es el punto medio del segmento PP'.
- En la simetría axial se conserva:

  d) las longitudes y los ángulos, pero no el sentido respecto a la figura inicial.
- Da algún ejemplo de la vida cotidiana donde se utilicen las simetrías. **En la naturaleza se dan multitud de estos, en las marcas de coches, *etc.***

<u>**Giros**</u>

1. Giro de 90º en sentido negativo.

   A(-8,1) → A'(1,8), B(-6,1) → B'(1,6), C(-7,0) → C'(0,7), O(0,0) → O'(0,0)
2. Giro de 180º en sentido negativo.

   A(-8,1) → A'(8,-1), B(-6,1) → B'(6,-1), C(-7,0) → C'(7,0), O(0,0) → O'(0,0)

3. Giro de 270º en sentido negativo.

   A(-8,1) → A'(-1,-8), B(-6,1) → B'(-6,-1), C(-7,0) → C'(0,-7), O(0,0) → O'(0,0)

Conclusiones:

- Hay tres elementos que intervienen en el movimiento de rotación o giro: **centro, ángulo o amplitud** y **sentido** del giro.
- El punto P' es el punto obtenido tras realizar un giro de centro en O, y ángulo α, del punto P. Se cumple que:

  c) la distancia OP es igual que la distancia OP'.
- El sentido positivo es aquel:

  b)correspondiente al movimiento contrario a las agujas del reloj.
- La rotación o giro es un movimiento a través de un punto que:

  a) mantiene la forma y el tamaño de la figura original.

EJERCICIO DE SÍNTESIS: ***"<u>El cometa Halley</u>"***

S1 T1 G1 T2

A(-9, 7) → A'(1,7) → A'' (3,6) → A'''(-7,-6) → **A''''(-4,-3)**

B(- 6,3) → B'(-2,3) → B'' (0,2) → B'''(-4,-2) → **B''''(-1,1)**

C(-6, 8) → C'(-2,8) → C'' (0,7) → A'''(-4,-7) → **A''''(-1,-4)**

9.3.9. Katherine Johnson

A-Problema: *"Las derivadas, el camino hacia la Luna"*

PARTE 1: Problema de optimización

La función a minimizar es el área del cilindro.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

La ecuación de ligadura que nos permite asociar las variables es,

$$\pi r^2 h = 1.6\cdot 10^6 \rightarrow h = \frac{1.6\cdot 10^6}{\pi r^2}$$

Sustituyendo la *h* en la función a minimizar obtenemos la siguiente expresión:

$$S(r) = 2\pi r(r+h) = 2\pi r\left(r + \frac{1.6\cdot 10^6}{\pi r^2}\right) = 2\pi r\left(\frac{\pi r^3 + 1.6\cdot 10^6}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi r^3 + 1.6\cdot 10^6}{r}\right) = \frac{2\pi r^3 + 3.2\cdot 10^6}{r}$$

Calculamos a continuación la primera y la segunda derivada de *S(r).*

$$S'(r) = \frac{(6\pi r^2)r - (2\pi r^3 + 3.2\cdot 10^6)}{r^2} = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3 - 3.2\cdot 10^6}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 3.2\cdot 10^6}{r^2}$$

$$S''(r) = \frac{(12\pi r^2)r^2 - (4\pi r^3 - 3.2\cdot 10^6)2r}{r^4} = \frac{(12\pi r^4) - 8\pi r^4 + (6.4\cdot 10^6)r}{r^4} = \frac{4\pi r^3 + 6.4\cdot 10^6}{r^3}$$

El siguiente paso es igualar la primera derivada a 0, para calcular los posibles máximos o mínimo.

$$S'(r) = 0$$

$$S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 3.2\cdot 10^6}{r^2} = 0 \rightarrow 4\pi r^3 - 3.2\cdot 10^6 = 0$$

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{3.2\cdot 10^6}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8\cdot 10^5}{\pi}} = 63.38\ dm$$

Como en el enunciado nos daban el volumen en litros, las dimensiones serán en decímetros. Por tanto, hay un posible máximo o mínimo en *r=63.38.*

A continuación, sustituimos el valor obtenido en la segunda derivada para comprobar que se trata de un mínimo. Para ello el signo de la segunda derivada en el punto debe ser positivo.

$$S''(r_0) = \frac{4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{8\cdot10^5}{\pi}}\right)^3 + 6.4\cdot10^6}{\left(\sqrt[3]{\frac{8\cdot10^5}{\pi}}\right)^3} = \frac{3.2\cdot10^6 + 6.4\cdot10^6}{8\cdot10^5}\pi = \frac{9.6\cdot10^6}{0.8\cdot10^6}\pi = 12\pi > 0$$

Tras comprobar que el signo de la segunda derivada es positivo, vemos que en *r=63.38* hay un mínimo relativo. Ahora calculamos *h*, a partir de la ecuación de ligadura, y obtenemos que

$$h = \frac{1.6\cdot10^6}{\pi(63.38)^2} = 126.78\ dm$$

Soluciones:

- **Radio r= 63.38 dm= 6.338 m**
- **Altura h=126.78 dm= 12.678 m**
- **Área S=757.27 metros cuadrados**

PARTE 2

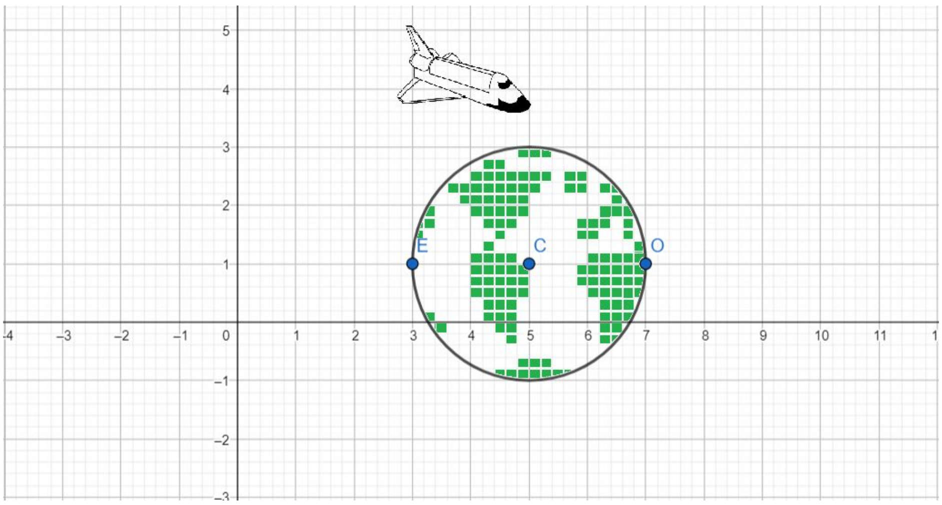


Figura 29: Mapa espacial de la Tierra sobre el que trabajar.

1. Calcula la ecuación de la órbita elíptica en la que se encuentra la nave. Indica todos los elementos de la elipse. Haz un dibujo aproximado. **Sol.:**

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

Los elementos de la elipse son:

Centro C (5,1)

Focos: E(3,1) y O(7,1)

Distancia focal c=2

Semieje mayor a=4, A(1,1) y A'(9,1)

Semieje menor b=$2\sqrt{3}$, B($5,\ 1+2\sqrt{3}$), B'($5,\ 1-2\sqrt{3}$)

Excentricidad: 0.5

2. ¿En qué punto de la órbita elíptica se encuentra la nave? **Conociendo las distancias del punto donde se encuentra la nave a los focos, y los puntos donde se encuentran los focos. Simplemente con la fórmula de la distancia entre dos puntos y un sistema llegamos al resultado → A(1,1)**

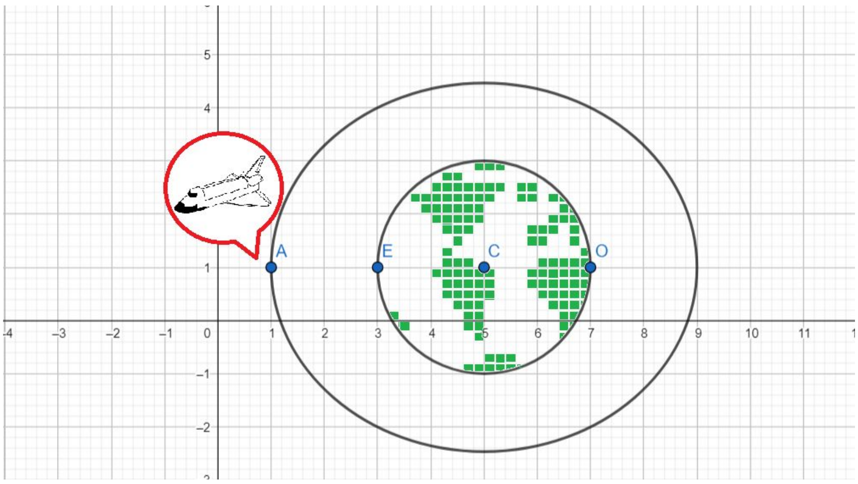


Figura 30: Mapa espacial de la Tierra y su órbita elíptica.

3. Para que la nave llegue a la Luna siguiendo una trayectoria recta y tangente, ésta debe desengancharse de la órbita elíptica en el punto de abscisas $x=3$ ¿Es única la recta tangente? Calcula la ecuación de las posibles rectas tangentes.

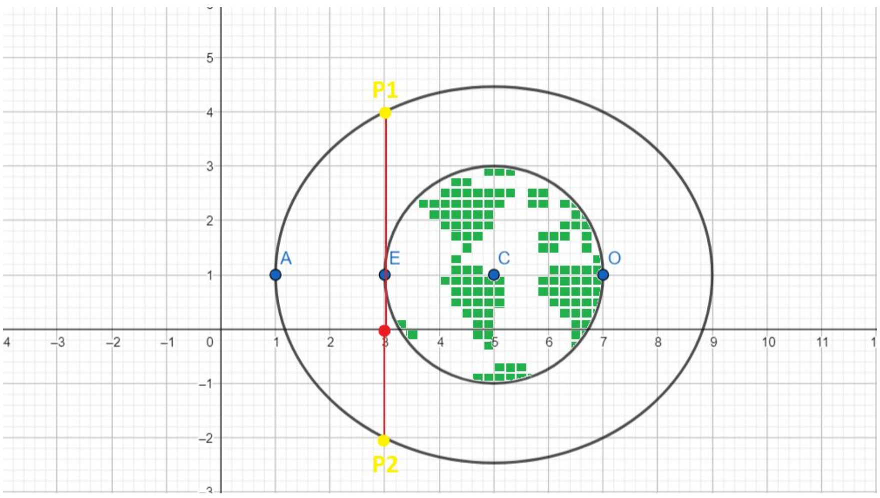


Figura 31: Mapa espacial de la Tierra.

No es la única recta tangente, para x=3 existen dos puntos P1(3,4) y P2(3,-2).

Para saber la pendiente de las dos rectas tangentes debemos calcular la derivada en cada uno de los puntos. Para derivar la elipse, vamos a utilizar la derivación implícita:

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

Derivamos de forma implícita y obtenemos,

$$\frac{2(x-5)}{16} + \frac{2(y-1)y'}{12} = 0$$

- Para el punto P1(3,4) obtenemos que la pendiente de la recta tangente es

  $$\frac{2\cdot(3-5)}{16} + \frac{2\cdot(4-1)\cdot y'}{12} = 0 \rightarrow\ y' = \frac{1}{2} = m_{P1}$$

  Por tanto la ecuación de la recta tangente para P1 es

  $$t_1:\ (y-4)\ = \tfrac{1}{2}(x-3)$$

- Para el punto P2(3,-2) obtenemos que la pendiente de la recta tangente es

  $$\frac{2\cdot(3-5)}{16} + \frac{2\cdot(-2-1)\cdot y'}{12} = 0 \rightarrow\ y' = \frac{-1}{2} = m_{P2}$$

  Por tanto la ecuación de la recta tangente para P1 es

  $$t_2:\ (y+2)\ = \tfrac{-1}{2}(x-3)$$

4. Katherine sabes que a ésta hora del día y en ésta época del año, la Luna se encuentra sobre el eje de abscisas. Si sabemos que la nave orbita alrededor de La Tierra en sentido positivo, y se desengancha de la órbita en el punto de abscisas x=3. Calcula las coordenadas espaciales de la Luna.

   Como la nave gira en sentido positivo, de las dos rectas tangentes calculadas solo puede tomar la que pasa por el punto P1(3,4) ya que nos dice que la luna se encuentra en el eje de las X. Si cogiéramos la otra recta y colocáramos la nave sobre ella se alejaría hacia el infinito y nunca cortaría con el eje de las X (debido al sentido de giro).

   $$t_1:\ (y-4)\ = \tfrac{1}{2}(x-3)$$

   La Luna tiene coordenadas L(-5,0).

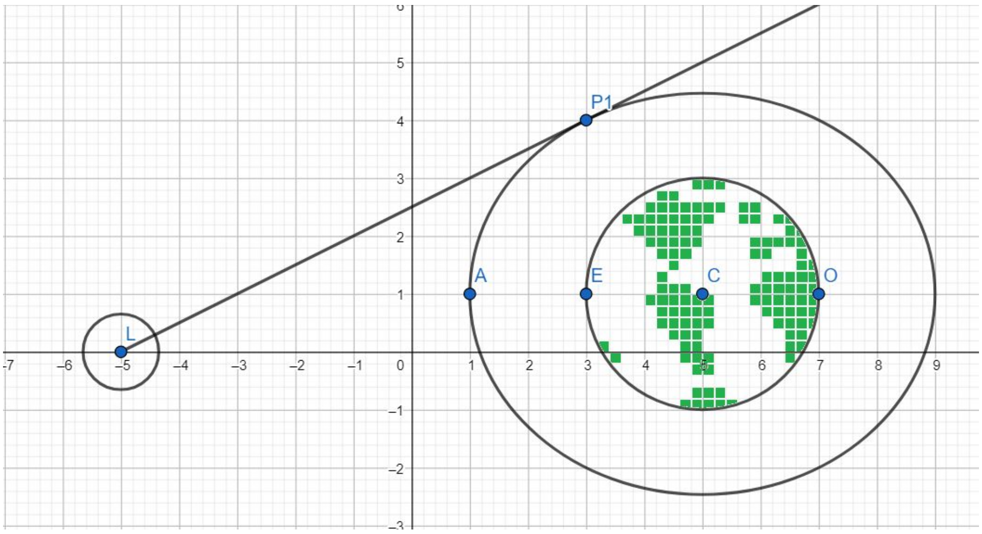


Figura 32: Representación gráfica de la elipse y la recta tangente en el punto P1.

9.3.10. María Dolores Zapata

Nota: En este apartado añadiremos algún truco didáctico más, en relación con el ejercicio.

Para los alumnos de 2º de la ESO en el tema de Triángulos y ángulos, suelen confundir la diferencia entre ángulo complementario y suplementario. Por ello te propongo que les enseñes el siguiente truco, para que consigan diferenciarlos.

> "Debes escribir la C y la S de forma angulosa, y escribir ángulos de 90º en cada dibujo."

> "En la C hay un ángulo de 90º, por ello los ángulos Complementarios suman 90º, mientras que en la S hay dos ángulos de 90º, por lo tanto los ángulos Suplementarios suman 180º."

Para los alumnos de 3º de la ESO, en el tema de Funciones. Una buena forma de que diferencien entre cual es la variable dependiente y cuál es la independiente, y además se familiaricen con la notación matemática de función, es la siguiente:

> "La notación de función es $y = f(x)$. Hay que ponerles el ejemplo en el que una persona conduce un coche. ¿El coche puede moverse por sí solo de manera independiente? Ellos responderán que no. ¿Quién depende que el coche se mueva? Ellos responderán que de la persona. ¿y la persona puede moverse de forma independiente? Ellos responderán que sí. Entonces tienen que imaginar que la f(...) es el coche y que la *x,* que está en su interior, es la persona que lo conduce, por tanto *x* es la variable independiente e *y* la dependiente."

Para los alumnos de 4º de la ESO, en el tema de Trigonometría, es muy útil aprenderse las razones trigonométricas de los ángulos notables 30º, 45º y 60º. Para ello te propongo que les enseñes el siguiente procedimiento.

“Crea la Tabla 18 y numera en la columna del seno los ángulos del menor a mayor.”

	Seno	Coseno	Tangente
30º	1		
45º	2		
60º	3		

Tabla 18: Ángulos notables y sus razones trigonométricas.

“A continuación, en la misma columna, aplica raíces cuadradas y divide entre 2. Así obtenemos los valores para el seno”

	Seno	Coseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$		
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		

“Debemos explicarles que seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario. Por lo que de ahí deben deducir los cosenos.”

	Seno	Coseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	

“Finalmente, para la columna de la tangente, basta con que dividan la columna del seno entre la del coseno. Finalmente quedará lo siguiente:”

	Seno	Coseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$